Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

MATHÉMATIQES

COMPOSITION DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DOUBLES

Par S. MICHLIN

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 27. I. 1936)

Notations et conditions. $P(x, y)$, $Q(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ sont des points du plan, dS_Q, dS_T sont des différentielles de l'aire, $W(P)$ est une fonction définie en tous les points du plan; $\frac{d^2W}{dx_1^2}$, $\frac{d^2W}{dx_1 dy_1}$, $\frac{d^2W}{dy_1^2}$ satisfont à la condition de Hölder. A l'infini l'on a: $W(P) = O\left(\frac{1}{OP^2}\right)$. R, ψ sont les coordonnées polaires de Q relatives au pole P; $M(P, Q) = \frac{1}{R^2} f(P, \psi + \pi)$. Les dérivées de f du deuxième ordre par rapport à x et y satisfont dans tout le plan à la condition de Lipschitz: la fonction f elle-même est périodique par rapport à ψ et satisfait à la condition $\int_0^{2\pi} f(P, \psi)\, d\psi = 0$.

$\tilde{f}(P, \psi)$ est l'intégrale indéfinie de $f(P, \psi)$ par rapport à ψ, telle que $\int_0^{2\pi} \tilde{f}(P, \psi)\, d\psi = 0$. Le domaine d'intégration dans les intégrales doubles est le plan infini. Les intégrales divergentes sont prises au sens de leurs valeurs principales *.

En faisant usage des résultats de G. Giraud (1) on peut démontrer que la fonction

$$U(P) = \iint W(Q) \frac{f(P, \psi + \pi)}{R^2}\, dS_Q \tag{1}$$

satisfait aux mêmes conditions que la fonction W.

En supposant que f_1, et f_2 ne dépendent que de ψ, F. Tricomi (2) a déduit la formule suivante de la composition des intégrales singulières:

$$\iint M_1(P, T) \left\{ \iint M_2(T, Q)\, W(Q)\, dS_Q \right\} dS_T =$$

$$= 2\pi W(P) \int_0^{2\pi} f_1(\theta) f_2(\theta + \pi)\, d\theta + \iint M_3(P, Q)\, W(Q)\, dS_Q, \tag{2}$$

* Nous appellerons les intégrales ainsi définies intégrales singulières.

où $M_3(P, Q) = \iint M_1(P, T) M_2(T, Q)\, dS_T = \frac{1}{R^2} \frac{d}{d\psi} \int_0^{2\pi} \left\{ \tilde{f}_1(\theta) \tilde{f}_2(\psi + \pi) + \right.$

$$\left. + \tilde{f}_2(\theta) \tilde{f}_1(\psi + \pi) - \tilde{f}_1(\theta) \tilde{f}_2(\theta + \pi) \right\} \operatorname{ctg}(\theta - \psi)\, d\theta. \qquad (3)$$

Les raisonnements de Tricomi recèlent une faute.

Il est nécessaire de remplacer la formule (2) par la suivante:

$$\iint M_1(P, T) \left\{ \iint M_2(T, Q) W(Q)\, dS_Q \right\} dS_T =$$

$$= 2\pi W(P) \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(P, \theta) \tilde{f}_2(P, \theta + \pi)\, d\theta + \iint M_3(P, Q) W(Q) dS_Q +$$

$$+ \text{ une intégrale alsolument convergente.} \qquad (4)$$

Cette formule est valable égalment dans le cas où f_1 et f_2 dépendent de P. Si f_1 et f_2 ne dépendent pas de P, l'intégrale absolument convergente disparaît *.

Nous allons désigner l'opération fonctionnelle

$$L(W) = a_0(P) W(P) + \iint W(Q) \frac{f_0(P, \psi)}{R^2} dS_Q \qquad (5)$$

par

$$\bar{f}(P, \psi) \times W, \quad \text{où} \quad \bar{f}(P, \psi) = a_0(P) + f_0(P, \psi).$$

Nous appellerons $\bar{f}(P, \psi)$ le symbole de l'opération (5). Nous appellerons de même la somme $\bar{f}_1 + \bar{f}_2$ et le produit $\bar{f}_1 * \bar{f}_2$ les symboles des opérations $L_1(W) + L_2(W)$ et $L_1[L_2(W)]$. Nous attribuons le symbole zéro à chaque intégrale absolument convergente de densité W et considérons l'expression $\bar{f} \times W$ comme définie à une intégrale absolument convergente près. Il s'ensuit des résultats de Giraud (1), que $0 * \bar{f} = \bar{f} * 0 = 0$. Les formules (3) et (4) montrent que la multiplication des symboles est commutative. Désignons par h le symbole $\frac{1}{2\pi} e^{i\psi}$. On peut obtenir de (3) et (4) les relations symboliques:

$$e^{in\psi} = \frac{2\pi}{n} h^n; \quad e^{-in\psi} = \frac{2\pi}{n} h^{-n}, \quad n > 0. \qquad (6)$$

Il dérive de (6) que chaque symbole est développable en série de Laurent suivant les puissances de h. En conséquence nous allons écrire aussi $\bar{f}(h)$ au lieu de $\bar{f}(P, \psi)$. Nous allons également considérer h comme un point du plan de Gauss, et nous supposerons $\bar{f}(h)$ holomorphe à l'intérieur d'un certain anneau du type de $1 < |h| < \rho$ ou de $\rho_1 < |h| < 1$ et la fonction $f(P, \psi)$ vérifiant la condition de Lipschitz

$$|f(P, \psi + \alpha) - f(P, \psi)| < K |\alpha|,$$

où K ne dépend pas de P. $|h| = 1$. Il résulte de cette supposition que les séries de Laurent de $\bar{f}(h)$ et de $\bar{f}'(h)$ convergent absolument et uniformément à l'intérieur d'un certain anneau comprenant la circonférence

* La démonstration de la formule (3), donnée par F. Tricomi, n'est pas rigoureuse. Nous avons démontré cette formule sous quelques conditions assez générales, en employant une méthode différente de celle de F. Tricomi.

$|h| = 1$ dans sa frontière. Si $\bar{f}(h) \neq 0$ pour $|h| = 1$, les séries de Laurent de $\frac{1}{\bar{f}(h)}$ et de $\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{\bar{f}(h)}\right)$ jouissent de la même propriété.

En écrivant chaque symbole sous forme d'une série de puissances du symbole h, nous pouvons effectuer toutes les opérations sur les symboles suivant les règles établies pour les opérations sur les séries de puissances. Il résulte de là que l'anneau des symboles ne contient pas de diviseurs de zéro.

Soit

$$L(W) = a_0(P)\,W(P) + \iint \frac{f_0(P, \psi)}{R^2} W(Q)\,dS_Q + \\ + \iint W(Q)\,K(P, Q)\,dS_Q{}^* = F(P) \tag{7}$$

une équation intégrale singulière donnée. Tentons de chercher une opération $L_1(U)$ telle que l'on ait:

$$L_1[L(U)] = W(P) + \iint W(Q)\,K_1(P, Q)\,dS_Q, \tag{8}$$

où l'intégrale soit absolument convergente**. Pareille opération étant trouvée, la résolution de l'équation (8) se réduit à celle de l'équation de Fredholm. Nous allons chercher $L_1(U)$ sous la forme d'une opération singulière:

$$L_1(U) = \alpha_0(P)\,U(P) + \iint U(Q) \frac{\varphi_0(P, \psi)}{R^2}\,dS_Q. \tag{9}$$

En posant $a_0 + f_0 = \bar{f}$, $\alpha_0 + \varphi_0 = \bar{\varphi}$, nous avons

$$L(W) = \bar{f} \times W,\ L_1(U) = \bar{\varphi} \times U.$$

Nous avons à résoudre l'équation

$$\bar{f} * \bar{\varphi} = 1, \tag{10}$$

c.-à-d., à trouver le symbole $\bar{f}^{-1}$. Considérons h comme un point du plan de Gauss. Supposons en premier lieu que $\bar{f}(h) \neq 0$, quand $|h| = 1$. Dans ce cas $\bar{\varphi}(h) = \frac{1}{\bar{f}(h)}$. Les coefficients de Laurent de $\varphi(h)$ sont donnés par la formule connue

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^{n+1}\,\bar{f}(z)}. \tag{11}$$

En remplaçant les h^n dans $\bar{\varphi}(h)$ par les valeurs empruntées aux formules (6) nous trouverons l'opération $L_1(U)$.

Supposons maintenant que $\bar{f}(h)$ a des racines $\varkappa_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $|\varkappa_k| = 1$. Nous avons:

$$\bar{f}(h) = (\varkappa_1 - h)(\varkappa_2 - h) \ldots (\varkappa_k - h)\,\bar{f}_1(h), \tag{12}$$

et $\bar{f}_1(h) \neq 0$ pour $|h| = 1$. En multipliant l'équation (7) par $\bar{f}_1^{-1}(h)$ et en

* La dernière intégrale est absolument convergente.

** Une telle opération existe nécessairement, si l'équation (7) a une solution unique pour $F(P)$ restant arbitraire.

posant $V = (\varkappa_2 - h) * \ldots * (\varkappa_k - h) \times W$, $\Phi = \bar{f}_1^{-1} \times F$, nous obtiendrons l'équation

$$(\varkappa_1 - h) \times V = \Phi, \quad |\varkappa_1| = 1. \tag{13}$$

On peut démontrer que cette équation n'a pas de solution pour Φ arbitraire et que l'opération $L_1(U)$ n'existe pas dans ce cas.

Si $\bar{f}_0(P, \psi)$ est un polynôme trigonométrique, le symbole $\bar{\varphi} = \bar{f}^{-1}$ se trouve d'une façon particulièrement facile. Il est évident que dans ce cas

$$\bar{f}(h) = h^{-m} \sum_{k=1}^{n} a_k h^k = (-1)^n a_n h^{-m} \prod_{k=1}^{n} (\varkappa_k - h). \tag{14}$$

En faisant usage des formules (6) on obtient facilement:

$$(\varkappa_k - h)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varkappa_k} + \dfrac{e^{i\psi}}{(2\pi\varkappa_k - e^{i\psi})^2}; & |\varkappa_k| > 1, \\ -\dfrac{2\pi e^{i\psi}}{(\varkappa_k - 2\pi e^{i\psi})^2}; & |\varkappa_k| < 1, \end{cases} \tag{15}$$

et $\varphi_0(P, \psi)$ est simplement une fraction rationnelle trigonométrique.

En appliquant une opération du type de (9) il est impossible de réduire l'équation (7) à une équation de Fredholm de la première espèce. C'est là une conséquence directe de ce que l'anneau des symboles n'a pas de diviseurs de zéro.

Considérons enfin le système d'équations singulières

$$L_j(W_1, W_2, \ldots, W_n) = \sum_{k-1}^{n} \bar{f}_{jk} \times W_k = F_j(P) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Toutes les règles du calcul des déterminants et des matrices restent valables lors même que les éléments de ces déterminants ou de ces matrices sont des symboles, vu que l'anneau des symboles est commutatif. Soit $\bar{f}$ le symbole égal au déterminant des symboles du système (16) et $\bar{\varphi}_{jk}$ les compléments algébriques des éléments $\bar{f}_{jk}$ dans ce déterminant. S'il existe un $\bar{f}^{-1} = \bar{\varphi}$, on peut construire le système d'opérations

$$L_j^*(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \sum_{k=1}^{n} (\bar{\varphi}_{kj} * \bar{\varphi}) \times U_j. \tag{17}$$

Il est évident que le produit des matrices des systèmes (16) et (17) est égal à l'unité, et qu'on peut transformer le système (16) en un système de Fredholm. Cette transformation est impossible s'il n'existe pas de $\bar{f}^{-1}$.

Institut Séismologique
de l'Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 27. I. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] G. Giraud, Ann. de l'Éc. Norm. Sup., **51**, fasc. 3 et 4 (1934). [2] F. Tricomi, Math. ZS., **27**, 87—133 (1927).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

MATHEMATIK

EINIGE SÄTZE ÜBER HALBGEORDNETE RÄUME ALLGEMEINER ART

Von L. KANTOROVIČ (KANTOROVITCH)

(Vorgelegt von S. N. Bernstein, Mitglied der Akademie, d. 15. II. 1936)

In meiner Notiz (1) wurde die Definition des halbgeordneten Raumes gegeben *. Ferner betrachtete ich lineare halbgeordnete Räume. Hier will ich die Untersuchung einiger topologischer Eigenschaften der halbgeordneten Räume allgemeiner Art wieder aufnehmen und insbesondere die Theorie der halbstetigen Funktionen betrachten, deren Werte einem solchen Raum angehören. Im § 1 führe ich einige weitere Axiome ein und erhalte aus ihnen einige Folgerungen. Im § 2 werden halbstetige Funktionen betrachtet, deren Werte dem halbgeordneten Raum angehören. Der § 3 enthält einige Bemerkungen über lineare Räume.

§ 1. Im nachfolgenden werden wir voraussetzen, dass der Raum Y, ausser den Axiomen I_1—I_6 ** der zitierten Notiz, noch den weiteren drei Axiomen genügt:

I_7. Für jedes Paar von solchen y_1 und y_2, dass $y_1 < y_2$ ist, kann man ein Element y_3 finden, das zwischen ihnen liegt $y_1 < y_3 < y_2$.

I_8. Es sei $E_1, E_2, \ldots$ eine Folge von Mengen des Raumes Y und es existiere ein Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(\sup E_n) = y_0$. Dann existieren solche endliche Mengen $E_n' \subset E_n$, dass $\lim_{n\to\infty}(\sup E_n') = y_0$ wird. Die analoge Behauptung, die bei Ersetzung von sup durch inf erhalten wird, soll ebenfalls erfüllt werden.

I_9. Ist $y_n \to y$; $y_{n+1} \geqslant y_n$, so ist $\lim_{n\to\infty}[\inf(y_n, y')] = \inf(y, y')$ für jedes beliebige $y' \in y$; die analoge Behauptung gilt auch für sup.

Wir führen einige Folgerungen aus diesen Axiomen an.

Folgerung 1. Ist $E \subset Y$ eine beliebige Menge, so existiert eine solche abzählbare Menge $E' \subset E$, dass $\sup E' = \sup E$ und $\inf E' = \inf E$ sind.

---

* Ich benütze hiermit die Gelegenheit, um auf die vor kurzem erschienene Arbeit von O. Ore (2) hinzuweisen, wo zu algebraischen Zwecken halbgeordnete Mengen betrachtet werden und insbesondere ein Axiom eingeführt wird, das mit unserem Axiom I_6 übereinstimmt.

** Übrigens ist Axiom I_5 hier belanglos.

Folgerung 2. Eine wohlgeordnete wachsende Menge von Elementen des Raumes Y ist stationär, d. h. falls $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_\omega \leqslant y_{\omega+1} \leqslant \ldots$ ist, so lässt sich eine Zahl α der ersten oder zweiten Klasse derart finden, dass, von ihr angefangen, $y_\alpha = y_{\alpha+1} = \ldots$ wird.

Folgerung 3. $\sup(y, y')$ ist eine stetige Funktion beider Argumente, d. h., wenn $y_n \rightarrow y$ und $y'_n \rightarrow y'$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} [\sup(y_n, y'_n)] = \sup(y, y')$.

Folgerung 4. Es sei $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$; $\overline{y_i} = \lim\limits_{k\to\infty} y_i^{(k)}$; dann existiert eine solche Folge von Indices $k_1, k_2 \ldots$, dass $\lim\limits_{i\to\infty} y_i^{(k_i)} = y$ wird.

Die Gültigkeit des Grenzbegriffes für den halbgeordneten Raum gestattet die Einführung einiger topologischen Definitionen. Der Punkt y heisst Grenzpunkt der Menge E, wenn es eine Folge von Punkten $y_n \in E$ gibt, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ wird. Die abgeschlossene Hülle der Menge E, die wir mit $\overline{E}$ bezeichnen werden, ist die Menge E samt ihren Grenzpunkten. Infolgedessen werden noch weitere topologische Begriffe eingeführt: diejenigen der offenen und abgeschlossenen Mengen, der dichten Menge, der Menge erster Kategorie.

Die Operation $\overline{E}$ in Raume Y genügt den folgenden Bedingungen: 1) $\overline{E} = E$, wenn E aus einen Punkt besteht oder leer ist; 2) $\overline{(E_1 + E_2)} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$; 3) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, auf Grund der Folgerung 4. Deshalb können wir, von der Operation der Hüllenbildung ausgehend, den Raum Y als topologischen Raum (3) betrachten.

Indem wir Y als einen topologischen Raum betrachten, kommen wir zu einer anderen Definition des Grenzwertes im Raume Y, die, im allgemeinen, von der ursprünglichen verschieden ist, nämlich zur nachstehenden: Die Folge y_n strebt topologisch nach y: $y_n \rightarrow y$ (*), wenn aus jeder Folge y_{n_k} eine solche Teilfolge $y_{n_{k_i}}$ gewählt werden kann, dass $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y$ im üblichen Sinne wird. Für den n-dimensionalen Vektorraum, z. B., und für den Raum aller reellen Funktionen fällt die topologische Konvergenz mit der früher definierten zusammen. Für den Raum $Y_2^{(p)}$ der in p-ter Potenz summierbaren Funktionen ist die (*)-Konvergenz die starke Konvergenz mit dem Exponenten p, für den Raum der beschränkten messbaren Funktionen ist die (*)-Konvergenz die beschränkte Konvergenz nach Mass.

§ 2. Es sei X irgendein metrischer Raum. Wir betrachten Funktionen von der Form $y = f(x)$, welche den Raum X in einen halbgeordneten Raum Y überführen. Als obere Grenze der Funktion $f(x)$ im Punkte x werden wir das Element $M(x)$ bezeichnen, das wie folgt definiert wird:

$$M(x) = M_f(x) = \inf_{r>0} \sup_{\rho(x',x)\leqslant r} [f(x')].$$

Analog kann die untere Grenze $m(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkte x definiert werden. Die Funktion $f(x)$ heisst halbstetig von oben bzw. von unten im Punkte x, falls $M_f(x) = f(x)$ bzw. $m_f(x) = f(x)$ ist. Wir führen nun einige Sätze über halbstetige Funktionen an, die den entsprechenden Sätzen über halbstetige Funktionen mit reellen Werten (4) analog sind.

Satz 1. *Welches auch immer die Funktion $f(x)$ sei, ist die Funktion $M_f(x)$ halbstetig von oben.*

Satz 2. *Wenn die Funktion $f(x)$ die untere Grenze einer Menge*

von oben halbstetiger Funktionen darstellet: $f(x) = \inf_{\xi \in \Xi} [f_\xi(x)]$, *so ist sie ebenfalls halbstetig von oben.*

Satz 3. *Damit die Funktion* $f(x)$ *halbstetig von oben im Punkte* x *sei, ist es notwendig und hinreichend, dass für eine beliebige Folge von Punkten* $x_n \to x$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \leqq f(x)$$

werde.

Folgerung. Damit die Funktion $f(x)$ stetig sei, ist es notwendig und hinreichend, dass sie halbstetig von oben und von unten sei.

Satz 4. *Ist die Funktion* $f(x)$ *halbstetig von oben, so ist bei beliebigen* $y \in Y$ *die Gesamtheit* $E[f(x) \geqq y]$ *abgeschlossen.*

Lemma. *Sind* $y_0 < y_1$ *zwei Elemente des Raumes* Y, *so existiert ein sie verbindender Weg, d. h. eine Funktion* $y = y(t)$, *die für* t *im Intervalle* $(0, 1)$ *definiert, stetig:* $\lim_{t_n \to t} y(t_n) = y(t)$, *monoton:* $y(t_2) \geqq y(t_1)$, *bei* $t_2 \geqq t_1$, *ist und den Bedingungen* $y(0) = y_0$; $y(1) = y_1$ *genügt. Der Raum* Y *wird als separabel vorausgesetzt.*

Satz 5. *Sind sowohl Raum* X *als auch Raum* Y *separabel und die Funktion* $y = f(x)$ *halbstetig von oben, so kann letztere als Grenzwert einer abnehmenden Folge von stetigen Funktionen dargestellt werden.*

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine dichte abzählbare Menge im Raume X. Wir führen die Grössen ein

$$y_{n,i} = \sup_{\rho(x_n, x') \leqq \frac{1}{i}} f(x') \qquad (n = 1, 2, \ldots ; i = 1, 2, \ldots).$$

Dem Lemma entsprechend definieren wir die Funktion der reellen Variablen $y_{n,i}(t)$ so, dass sie bei $0 \leqq t \leqq \frac{1}{i+1}$ gleich $y_{n,i}$ werde, bei Veränderung von t im Intervall $\frac{1}{i+1} \leqq t \leqq \frac{1}{i}$ vom Werte $y_{n,i}$ bis $+\infty$ stetig wächse, und bei $t \geqq \frac{1}{i}$ gleich $+\infty$ werde. Wir bestimmen $f_{n,i}(x)$ im Raume X, indem wir

$$f_{n,i}(x) = y_{n,i}[\rho(x, x_n]$$

setzen.

Wenn man nun

$$\varphi_k(x) = \inf [f_{1,1}(x),\ f_{1,2}(x),\ f_{2,1}(x),\ \ldots\ ,\ f_{k,k}(x)]$$

annimmt, so ist die Folge der stetigen Funktionen $\varphi_k(x)$ die gesuchte.

Satz 6. *Ist der Raum* X *kompakt, so ist die von oben halbstetige überall endliche Funktion* $f(x)$ *nach oben beschränkt.*

§ 3. Hier werden wir auf einige Resultate hinweisen, die sich speziell auf den Fall beziehen in welchem Y ein linearer halbgeordneter Raum ist, d. h. Y erfüllt noch die Axiome der II. und III. Gruppe der zitierten Arbeit (1). Wir führen zunächst einige Folgerungen aus dem Axiom I_8 an.

a) Besitzt die Menge $E \subset Y$ die Eigenschaft, dass, bei beliebigen reellen $\lambda_n \to 0$ und $y_n \in E$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n y_n = 0$ wird, so ist die Menge E beschränkt.

b) Ist $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, so kann man reelle $\mu_n \to \infty$ derart finden, dass $\lim_{n\to\infty} \mu_n y_n = 0$ wird.

c) Ist $y_n \nearrow y_n$ und $y_n' \nearrow y'$, so ist $\lim_{n\to\infty}(y_n + y_n') = y + y'$.

d) Ist $y_n \nearrow y$ und $y_n' \nearrow y'$, so ist $\lim_{n\to\infty}[\sup(y_n, y_n')] = \sup(y, y')$.

e) Es sei $y_n \nearrow y$, dann existiert solch ein y_0, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein N gefunden werden kann, für welches $|y_n - y| < \varepsilon y_0$ bei $n > N$ wird.

f) Man kann eine Art Umgebung nachweisen. Nennen wir Umgebung des Nullelementes jede Menge $U \subset Y$, die folgende Eigenschaften besitzt: 1) falls $y_0 \in U$ und $|y| \leqslant |y_0|$ ist, so ist auch $y \in U$; 2) für jedes $y \in Y$ kann man eine solche reelle Zahl k finden, dass $ky \in U$ wird. Damit nun der Nullpunkt Grenzpunkt für eine gewisse Menge $E \subset Y$ sei, ist es notwendig und hinreichend, dass $E \cdot U \neq 0$ für jede beliebige Umgebung U des Nullelementes sei.

B. Vulich (5) betrachtet besondere Räume, die er komplex-normierbar [(K)-normierbar] nennt. Man beachte, dass es sich für einige spezielle Räume erweist, dass die (K)-Konvergenz und die Konvergenz bei Betrachtung derselben Menge als eines halbgeordneten Raumes zusammenfallen. Diese Tatsache lässt sich durch den folgenden Satz allgemeinen Chrakters erklären.

Satz. Es sei Y eine lineare halbgeordnete Menge, und ausserdem noch nach Banach derart normiert, dass die Bedingung $\|y\| \leqslant \|y_1\|$, falls $|y| \leqslant |y_1|$, erfüllt wird. Dann lässt sich der Raum Y komplex normieren; nämlich, wenn der Komplex $K = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ist, so kann man setzen:

$$\|K\| = \|\sup(|y_1|, \ldots, |y_n|)\|.$$

Ist dabei Y ein halbgeordneter Raum und wird für jede abnehmbare Folge $y_n \to 0$ auch $\lim_{n\to\infty}\|y_n\| = 0$, so stimmt die (*)-Konvergenz in diesem Raume mit der Konvergenz nach der Norm überein und ist die übliche Konvergenz darin die (K)-Konvergenz.

Institut f. Mathematik und Mechanik
der Universität. Leningrad.

Eingegangen
d. 15. II. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] L. Kantorovitsch, C. R. Acad. Sci. URSS, **IV**, № 1—2 (1935). [2] O. Ore, Ann. of Math., **36**, 406—438 (1935). [3] K. Kuratowski, Topologie, I (1932). [4] F. Hausdorff, Math. ZS., **5**. 293. [5] B. Vulich, C. R. Acad. Sci. URSS, **IV**, 8—9 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

MATHÉMATIQUES

SUR L'EXISTENCE D'UN INVARIANT INTÉGRAL DANS L'ENSEMBLE DES POINTS PÉRIODIQUES

Par B. DEMIDOVIČ

(Présenté par N. N. Lusin, de l'Académie, le 19. II. 1936)

1. Ce travail contient des résultats relatifs au problème suivant: soit donné un groupe à un paramètre de transformations ponctuelles $T_t\,(-\infty < t < +\infty)$:

$$T_t T_s = T_{t+s}, \tag{1}$$

d'un ensemble mesurable $\mathfrak{M}$ de l'espace euclidien n-dimensionnel en lui-même. On se demande quels doivent être les trajectoires des points de $\mathfrak{M}$, pour qu'il existe dans $\mathfrak{M}$ un invariant intégral relatif au groupe de transformations T_t.

Nous supposons que les transformations T_t admettent des dérivées continues par rapport à t et que pour tout couple x_0, y_0 de points de $\mathfrak{M}$ la distance de leurs images $T_t(x_0) = x_t$, $T_t(y_0) = y_t$ satisfait à l'inégalité

$$\rho(x_t, y_t) \leqslant N_t \cdot \rho(x_0, y_0), \tag{2}$$

où N_t est une fonction dépendant seulement de t, positive et finie.

2. Désignons par $\mathfrak{P}$ l'ensemble des points de $\mathfrak{M}$ appartenant aux trajectoires périodiques (y compris les points d'équilibre); nous l'appellerons «ensemble des points périodiques». On a le

Théorème 1. Pour tout point $x_0 \in \mathfrak{P}$ de période $\tau = \tau(x_0) > 0$ et pour tout nombre positif τ_0, on peut assigner un nombre positif $\delta = \delta(x_0, \tau_0)$ tel que quel que soit le point $x_0' \in \mathfrak{P}$ situé dans le δ-voisinage de x_0, si sa période $\tau' = \tau(x_0')$ est inférieure à τ_0 elle satisfait à l'inégalité:

$$|\tau(x_0') - \nu\tau(x_0)| \leqslant K \cdot \rho(x_0', x_0), \tag{3}$$

ν étant un entier non inférieur à 1 et $K = K(x_0, \tau_0) < +\infty$.

3. Théorème fondamental 2. *Sur l'ensemble $\mathfrak{P}$ des points périodiques de $\mathfrak{M}$ il existe un invariant intégral n-dimensionnel, qui prend une valeur finie positive sur tout ensemble de mesure finie > 0.*

Démonstration. En vertu du théorème 1 l'ensemble $\mathfrak{P}$ des points périodiques sans l'ensemble des points d'équilibre $\mathfrak{P}^0$, peut être considéré comme une somme dénombrable d'ensembles invariants mesurables $\mathfrak{P}^i$ tels que 1) pour chaque $\mathfrak{P}^i$ l'ensemble des périodes de ses points a une borne

supérieure finie et une borne inférieure positive, 2) l'inégalité (3) est remplie uniformément pour tous les points de $\mathfrak{P}^i$, la constante $K = K_i$ ayant une valeur fixe et ν étant égal à l'unité

Il est facile de montrer que sur tout ensemble $\mathfrak{P}^i$ de mesure positive, il existe une borne supérieure finie pour les relations

$$\frac{\text{mes } A_t}{\text{mes } A_0} \qquad \left(\begin{matrix} A_0 \subset \mathfrak{P}^i \\ \text{mes } A_0 \neq 0 \end{matrix} \quad -\infty < t < +\infty\right). \tag{4}$$

En effet, considérons un nombre positif $1 > \varepsilon > 0$. Tout ensemble mesurable $A_0 \subset \mathfrak{P}^i$ (mes $A_0 \neq 0$) peut être représenté, à un ensemble de mesure nulle près, comme une somme au plus dénombrable d'ensembles mesurables A_0^h, deux à deux sans points communs et tels que A_0^h est contenu dans une sphère S_ρ^h de rayon ρ_h, ayant dans cette sphère sa densité moyenne supérieure à $1 - \varepsilon$. Décomposons A_0^h en une somme dénombrable de parties A_0^{hs} sans points communs de diamètres inférieurs à $\rho_h \cdot \mu(t)$, [$\mu(t)$ étant une fraction suffisamment petite dépendant de t] de telle façon que tous deux points x_0' et x_0'' appartenant à une même partie A_0^{hs} admettent deux périodes $\tau' = \tau(x_0')$, $\tau'' = \tau(x_0'')$ qui vérifient l'inégalité:

$$|\tau(x_0') - \tau(x_0'')| < K_i \cdot \rho(x_0', x_0''). \tag{5}$$

La transformation T_t peut être décomposée en deux transformations: 1) T_t' (déplacement) qui transforme le point $x_0 \in A_0^{hs}$ en le point $T_t'(x_0) = x_t' = x_{t-\nu^{hs}\tau}$, $\tau = \tau(x_0)$ étant la période de x_0 et $\nu^{hs} = \frac{t}{\tau^{hs}}$, où $\tau^{hs} = \tau(x_0^{hs})$ est la période d'un point fixe $x_0^{hs} \in A_0^{hs}$; 2) T_t'' (transport) qui transforme le point intermédiaire x_t' en le point x_t. Ces deux transformations sont biunivoques et mesurables. Par un choix convenable de la grandeur $\mu(t)$ on peut obtenir que l'image $T_t'(A_0^h)$ soit compris dans la sphère de rayon $\rho_h \cdot (1 + \varepsilon)$ concentrique à S_ρ^h. Donc

$$\frac{\text{mes } T_t'(A_0)}{\text{mes } A_0} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^n}{1-\varepsilon}. \tag{6}$$

Maintenant si l'on applique la transformation T_t'' à l'image $T_t'(A_0)$, on démontre facilement en faisant usage des relations (2) et (5) que

$$\frac{\text{mes } T_t''(A_0)}{\text{mes } T_t'(A_0)} \leqslant \Gamma_i < +\infty. \tag{7}$$

Donc

$$\Gamma_i^{-1} \cdot \text{mes } A_0 \leqslant \text{mes } A_t \leqslant \Gamma_i \cdot \text{mes } A_0. \tag{8}$$

En vertu du théorème de Birkhoff et Smith (1) il s'ensuit que sur l'ensemble $\mathfrak{P}^i$ existe un invariant intégral comparable («of the order») (2) avec la mesure, d'où, en faisant usage des méthodes de E. Hopf (2), on conclut que sur $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^0 + \sum_i \mathfrak{P}^i$ il existe un invariant intégral qui prend des valeurs finies sur les ensembles de mesure finie.

Conséquence. Pour qu'il existe sur un ensemble plan $\mathfrak{M} \subset E^2$ de mesure finie un invariant intégral relatif au groupe des transformations T_t, il faut et il suffit que presque tous les points de $\mathfrak{M}$ soient stables au sens de Poisson.

4. Il est intéressant de remarquer que la démonstration, dans le cas n-dimensionnel de cet énoncé serait équivalente à la démonstration de l'hypothèse connue de Poincaré.

Théorème 3. *Si aucun des sous-ensembles de* $\mathfrak{M}$ (mes $\mathfrak{M} < +\infty$) *ne peut être transformé par* T_t *dans une partie de soi-même de mesure inférieure à la mesure initiale, alors presque tous les points de* $\mathfrak{M}$ *sont*

stables au sens de Poisson.

La démonstration est analogue à la démonstrations de Carathéodory du Wiederkehrsatz de Poincaré (3).

Manuscrit reçu
le 19. II. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Birkhoff und Smith, Journ. de Math., **7**, 360—368 (1923). [2] E. Hopf, Trans. Amer. Math. Soc., **34**, 373—393 (1932). [3] Carathéodory, Sitz. Preuss. Akad. Wissensch., **XXXII** (1919).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

HYDRAULIK

DIE WIRKUNG DER ZENTRIFUGALKRÄFTE INNERHALB DER ACHSIALEN PUMPEN

Von P. A. WALTHER, korrespondierendes Mitglied der Akademie, und V. A. STEFANOVSKIJ

Die technische Literatur enthält genug Material über experimentelle Untersuchungen, durch welche die achsialen Pumpen in technischer Hinsicht gekennzeichnet werden. Fast nichts jedoch ist über den Charakter der Strömung veröffentlicht worden, die innerhalb des Rades einer solchen Pumpe entsteht. Auch die Methodik des Experimentierens selber bedarf in diesem Falle noch einer Durcharbeitung.

Die Resultate, die wir hier vorführen, sind auf der Grundlage von Experimenten des Dipl.-Ing. V. A. Stefanovskij im Laboratorium des Institutes für Wasserkraftmaschinen der UdSSR gewonnen. Diese Arbeit wurde unter der Leitung von Dr.-Ing. Walther vorgenommen und wird in den Publikationen dieses Institutes eingehend behandelt werden.

Auf den Fig. 1—4 zeigt sich der meridionale Strom innerhalb der Pumpe, wie er unter vier verschiedenen Regimen beobachtet wurde. Das Regime für $Q=250$ l/sec ist normal.

Die Fig. 3 und 4 zeigen, dass in den Fällen $Q=200$ und 80 lt/sec dann, wenn die Förderhöhe bedeutend ($H=4.30$ und 6.35 m) ist, der Strahl seine Richtung innerhalb des Rades derart wählt, dass er die Wirkung der Zentrifugalkraft für eine Verstärkung des Druckes ausnutzen kann. Eine einfache Berechnung erwesit, dass so bis zu 90% ergänzenden Druckes gewonnen werden.

Man kann sagen, dass die Natur bei grossen Förderhöhen ebenso verfärht, wie auch der Ingenieur: sie ersetzt die achsiale Pumpe durch eine zentrifugale.

Fig. 2 lässt ersehen dass das normale Regime einer fast meridionalen Strömung entspricht. Kleine Abweichungen der Stromlinien von der Parallelität, die trotzdem bei der Betrachtung dieser Figur in vergrössertem Masstabe zu beobachten sind, müssen auf Ungenauigkeiten beim Profilieren der Schaufel zurückgeführt werden.

Die mechanische Bedeutung der Fig. 1, welche $Q=285$ l/sec. und $H=1.85$ m entspricht, ist die gleiche, wie auch die der Fig. 3 u. 4; nur die Wirkung der Zentrifugalkräfte hier nicht zu einer Erhöhung der Förderhöhe, sondern zu deren Verringerung ausgenutzt wird. Die Rechnung erweist, dass so bis zu 22% der Förderhöhe gelöscht werden.

Die Fig. 3 u. 4 zeigen, dass die zutage getretene Verschiebung der Stromlinien mit der Bildung von Totwassergebieten verbunden ist. Ein Auftreten von Totwassergebieten unter diesen Umständen ist aber nun doch nicht notwendig. Dipl.-Ing. Stefanovskij hat auch das Regime der Strömung bei Q=225 l/sec untersucht, ein Zwischenregime, das zwischen dem normalen

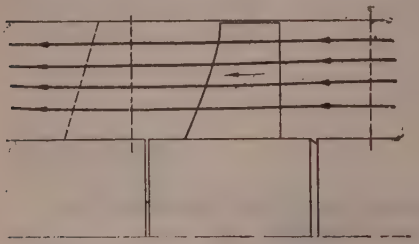


Fig 1 Q=285 l/sec H=1,85 mt

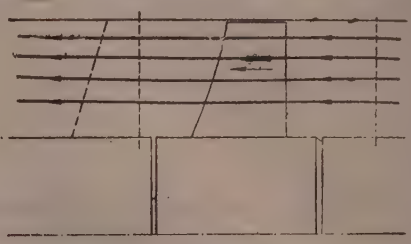


Fig 2 Q=250 l/sec. H=3,1 mt

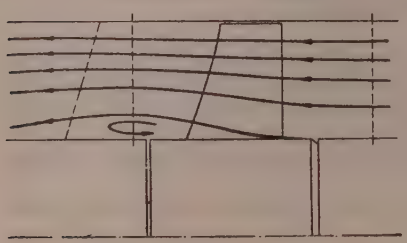


Fig 3 Q=200 l/sec H=4,3 mt.

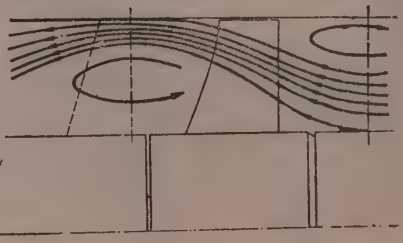


Fig 4 Q=80 l/sec H=6,35 mt.

Regime der Fig. 2 und dem Regime der Fig. 3 liegt. Diese Versuche ergaben ein geringes «Auseinanderströmen», d. h. Auseinandergehen der Stromfäden; Totwassergebiete aber wurden hierbei nicht festgestellt. Demgemäss ist anzunehmen, dass das «Auseinanderströmen» eine Grunderscheinung ist, die Entwicklung einer toten Zone aber entweder eine Folgeerscheinung oder auch eine Nebenerscheinung.

Auf jeden Fall aber besteht kein Zweifel daran, dass der Mechanismus der Bildung von Totwasserzonen zugleich mit der Mechanik einer radialen Verschiebung der Stromfäden untersucht werden muss.

Schliesslich bildet sich dann, bei sehr kleinen Q und grossen H in dem Strome, eine zweite Totwasserzone (Fig. 4), deren mechanische Bedeutung darin zu erblicken ist, dass in diesem Falle Wasser überhaupt dann nur gepumpt werden kann, wenn die Zentrifugalkraft Beistand leistet.

Institut für Wasserkraftmaschinen.
Moskau.

Eingegangen
d. 27. II. 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

CHEMIE

ÜBER DIE TITRATION DES ZWEIWERTIGEN PLATINS UND DREIWERTIGEN IRIDIUMS BEI VERSCHIEDENEN TEMPERATUREN

Von A. A. GRÜNBERG und B. V. PTICYN

(Vorgelegt von N. S. Kurnakov, Mitglied der Akademie, d. 9. I. 1936)

In unseren vorigen Abhandlungen berührten wir bereits mehrfach die Frage über die volumetrischen Bestimmungsmethoden der Platinmetalle (1). In unserer letzten Arbeit konnten wir feststellen, dass bei der potentiometrischen Titrierung schwefelsäurehaltiger, gleichzeitig $[PtCl_4]''$- und $[IrCl_6]'''$-Ionen enthaltender Lösungen mittels $KMnO_4$ bei Zimmertemperatur eine Oxydation der beiden Metalle stattfindet, wobei man auf der Titrationskurve nur einen Potentialsprung erhält, der dem summaren Gehalt der Lösung an Pt und Ir entspricht.

Es wurde schon früher gezeigt, dass die Oxydation des Platoats nach dem Schema

$$K_2[PtCl_4]+O+H_2O \rightarrow K_2[PtCl_4(OH)_2]$$

verläuft.

Die Oxydation des Iridiats in schwefelsaurem Medium lässt sich folgendermassen formulieren:

$$2K_3[IrCl_6]+O+H_2SO_4 \rightarrow 2K_2[IrCl_6]+K_2SO_4+H_2O.$$

Aus Gründen, die in den späteren Arbeiten näher erörtert werden, unternahmen wir die potentiometrische Titration von $[PtCl_4]''$ und $[IrCl_6]'''$ bei höheren Temperaturen (80—90°). Es stellte sich dabei heraus, dass die ersten Portionen von $KMnO_4$ keine charakteristische Iridiatfärbung hervorrufen (in der Kälte tritt eine solche bereits nach Hinzufügung mehrerer Tropfen $KMnO_4$ auf). Daraus konnte man schliessen, dass das $[PtCl_4]''$-Ion bei hoher Temperatur früher oxydiert wird als das $[IrCl_6]'''$-Ion. Auf der Titrationskurve lässt sich ein Potentialsprung wahrnehmen, der dem Ende der Titrierung von $[PtCl_4]''$ genau entspricht. Erst nach Beendigung der Titration von $[PtCl_4]''$ setzt die Oxydation von $[IrCl_6]'''$ ein und wird durch das Auftreten der charakteristischen Iridiatfärbung gekennzeichnet. Hierbei lässt sich jedoch das Ende der Iridiumtitration nicht durch einen deutlichen Potentialsprung auf der Titrationskurve nachweisen. Die Ergebnisse der potentiometrischen Titration sind in der Tabelle zusammengefasst.

In der eben skizzierten Weise lassen sich also die Tetrachloroplatoate in Gegenwart von Hexachloroiridiaten quantitativ bestimmen.

Eine derartige Bestimmung lässt sich aber auch visuell ausführen, und zwar in folgender Weise. Man titriert die $[PtCl_4]''$-und $[IrCl_6]'''$-Ionen

Titration von $[PtCl_4]''$ und $[IrCl_6]'''$ mittels $KMnO_4$.

Zimmertemperatur			88°C		
$KMnO_4$, cm³	mV	ΔmV	$KMnO_4$, cm³	mV	ΔmV
1.0	634		1.0	666	
		0.17			0.13
3.0	669		3.0	692	
		0.10			0.05
5.0	690		5.0	702	
		0.10			0.05
7.0	710		7.0	712	
		0.12			0.04
9.0	735		9.0	720	
		0.20			0.05
11.0	775		11.0	731	
		0.34			0.10
13.0	844		12.0	741	
		1.30			0.22
13.2	870		12.5	752	
		5.10			**0.45**
13.3	925		12.7	761	
		4.10			0.70
13.4	967		12.8	768	
		2.40			**7.40**
13.5	991		12.9	842	
		0.84			4.20
14.0	1033		13.0	884	
					1.17
			14.0	1001	
Berechnet für $Pt^{II}+Ir^{III}$: 13.32 cm³.			Berechnet: 47.01% Pt.		
Gefunden für $Pt^{II}+Ir^{III}$: 13.25 cm³.			Gefunden: 46.98% Pt.		

Die Resultate der visuellen Titration sind durchaus befriedigend:

Berechnet 47.01% Pt; Gefunden 46.73, 47.22, 46.79% Pt.

enthaltende siedende Lösung in schwefelsaurem Medium mittels $KMnO_4$ bis zum Auftreten der für das $[IrCl_6]'''$-Ion charakteristischen Färbung, wonach die Lösung sofort mit einer eingestellten Lösung des Mohrschen Salzes bis zum Verschwinden der rotbraunen Iridiatfärbung rücktitriert wird.

Hierbei muss man darauf Acht geben, dass der Überschuss an $KMnO_4$, bezogen auf Pt^{II}, stets unter der Grenze des Iridiumsgehalts bleibe, damit in der Lösung keine freien MnO_4-Ionen entstehen.

Analoge Erscheinungen lassen sich auch beim Titrieren des Systems $[PtCl_4]''—]IrCl_6]'''$ mittels $NaBrO_3$ in salzsaurer Lösung beobachten. Ein Unterschied vom Falle der Permanganat-Titration besteht nur darin, dass hier die Resultate der «kalten» Titration weniger deutlich hervortreten. Auch in diesem Falle findet eine gleichzeitige Oxydation der beiden Metalle statt, der Potentialsprung ist aber stark verwischt. In der Hitze lässt sich auch hier die Titration durch das Auftreten eines deutlichen Potentialsprunges, welcher der Oxydation von $[PtCl_4]''$ entspricht, kennzeichnen. Doch ist die Permanganat-Titration praktisch vorzuziehen, da die Einstellung der Potentiale viel rascher erfolgt.

Die Erscheinungen, welche beim potentiometrischen Titrieren von $[PtCl_4]''$ und $[IrCl_6]'''$ bei 20 und 80—90° stattfinden, können folgendermassen gedeutet werden. Beim Zufügen von $KMnO_4$ bzw. $NaBrO_3$ zu der $[PtCl_4]''$ sowie $[IrCl_6]'''$ enthaltenden Lösung findet in erster Linie die Oxydation von $[PtCl_4]''$ statt. Daneben wird aber auch teilweise das $[IrCl_6]'''$ mitoxydiert. Das gebildete $[IrCl_6]''$-Ion wird auf Kosten des noch im Überschuss vorhandenen $[PtCl_4]''$-Ions wieder reduziert. Bei 20° geht diese Reaktion noch ziemlich langsam vor sich, bei 80° aber wird die Reaktionsgeschwindigkeit normalerweise stark gesteigert. Dazu kommt viel-

leicht auch die stärker ausgeprägte Temperaturabhängigkeit des ox-red-Potentials des Systems $[IrCl_6]'''$—$[IrCl_6]''$ in Betracht.

Institut für allg. Chemie an d. Akademie der Wissenschaften der UdSSR (Moskau) und Laboratorium f. anorg. und anal. Chemie am 1 Mediz. Institut (Leningrad).

Eingegangen d. 9. I. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

Изв. Платинов. ин-та Акад. Наук СССР, **11**, 77 (1933), **12**, 133 (1935); C. R. Acad. Sci. URSS, **6** (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

CHEMIE

KOMPLEXE FLUORIDE. I

HYDROLYSE DES SILICOFLUORIDIONS

Von J. G. RYSS und N. P. BAKINA

(Vorgelegt von I. V. Grebenščikov, Mitglied der Akademie, d. 16. II. 1936)

Die allercharakteristischste chemische Eigenschaft des Fluorions ist seine Fähigkeit, zahlreiche Komplexe zu bilden, die in vielen Fällen eine grosse Stabilität aufweisen. Zu diesen Komplexen gehört auch das Silicofluoridion $(SiF_6)''$, das sich in wässrigem Medium gemäss der Gleichung

$$(SiF_6)'' + 2H_2O = SiO_2 + 4H^{\cdot} + 6F'$$

hydrolytisch spaltet.

Die Grösse der entsprechenden Hydrolysenkonstante ist für die Beständigkeit der wässrigen Lösungen von Metallsilicofluoriden massgebend, unter anderem auch derjenigen, die unlösliche Fluoride bilden; sie bestimmt also auch gewissermassen die Bedingungen, unter denen die Gewinnung von kieselfluorwasserstoffsaurem Kalzium aus Flusspat vorgenommen werden muss [Verfahren der Ring-Gesellschaft(1)], die Verwertbarkeitsbedingungen der Komplexbildung für analytische Zwecke (2) u. s. w.

Kobelka und Pristoupil (3) haben die Werte der Hydrolysenkonstante für $(SiF_6)''$ bei 23° aus den von ihnen bestimmten Grössen des Wasserstoffexponenten von an kieselfluorwasserstoffsaurem Natrium gesättigten, teilweise durch Ätznatron verseiften Kieselfluorwasserstoffsäurelösungen berechnet. Als Rechenformel diente der Ausdruck

$$K = \frac{(H^{\cdot})^4 (F')^6}{(SiF_6)''} = \frac{(H^{\cdot})^4 (F')^6}{L},$$

worin $(H^{\cdot})$ und (F') die Konzentrationen (in Mol/l) der entsprechenden Ionen und L das Löslichkeitsprodukt von Na_2SiF_6 bedeuten.

Die bekannte Fähigkeit der Kieselsäure kolloide Lösungen, sowie auch Bodenkörper von verschiedener Beschaffenheit zu bilden, lässt allerdings die Frage aufkommen, ob unter den von Kobelka (3) gewählten Bedingungen ein stabiles Gleichgewicht erreicht wurde.

Im Zusammenhang damit versuchten wir den Gleichgewichtszustand nach beiden Richtungen hin zu erreichen:

a) durch Zusatz von NaOH zu Na_2SiF_6,

b) durch Zusatz von NaF und SiO_2 zu Na_2SiF_6.

Ausserdem erfordern die Angaben Kobelkas eine Umrechnung, da in den von ihm benutzten konzentrierten Lösungen die Ionenaktivität, insbesondere die von $(SiF_6)''$, sich merklich von ihrer Konzentration unterscheidet.

Nachträglich wurden die Wasserstoffexponenten der Natriumsilicofluoridlösungen, sowie auch der Einfluss eines Gipszusatzes auf erstere bestimmt.

EXPERIMENTELLER TEIL

Versuchsstoffe. Kieselfluorwasserstoffsaures Natrium wurde durch Fällen chemisch reiner Kieselfluorwasserstoffsäure* mittels Natriumchlorid und durch Waschen des Produktes bis zum Verschwinden jeglicher Spuren von Chlor gewonnen.

Chemisch reines Natriumfluorid vom Polewskoj Werk wurde getrocknet und sodann zur Entfernung der freien Säure bei 350—400° geglüht. Ein unbedeutender Na_2SiF_6-Gehalt beeinträchtigte die Bestimmung nicht.

Chemisch reine Kieselsäure wurde durch Hydrolyse von SiF_4, durch anhaltendes Waschen und Trocknen bei 150° erhalten.

Die pH-Bestimmung wurde mit der Wasserstoffelektrode nebst gesättigter Kalomelvergleichselektrode ausgeführt. Als Stromschlüssel diente gesättigte, mit Agar-Agar gelatinierte KCl-Lösung**. Die EMK der Ketten wurde mittels eines Rapskompensators mit Spiegelgalvanometer als Nullinstrument gemessen. Sämtliche Messungen wurden im Thermostaten bei 20°C ausgeführt.

Da Kontrollversuche eine merkliche pH-Zunahme der Lösungen (insbesondere von reinem Na_2SiF_6) bei ihrem Kontakt mit Glas zeigten, wurden die zur Aufbewahrung der Lösungen benutzten Gefässe, sowie auch die Elektrodengefässe mit sorgfältig von ungesättigten Verbindungen gereinigtem Paraffin bedeckt.

Messresultate

Die Veränderungen der Hp-Werte von Lösungen, welche NaF, Na_2SiF_6 und SiO_2 enthalten, sind in Bezug auf die Zeit in Tabelle 1 angeführt.

Tabelle 1

pH-Werte bei einer Konzentration des NaF in $\frac{\text{Molen}}{1000g\ H_2O}$

Zeit nach Bereitung der Lösungen, in Tagen	0.9048		0.4524		0.2262	
	1	2	1	2	1	2
2	7.37	—	6.81	6.94	6.27	6.42
3	—	7.46	—	—	—	—
5	—	—	—	6.93	—	6.43
9	7.36	7.38	6.85	—	—	—
11	—	—	—	—	6.33	—
24	—	—	6.88	—	6.34	—
25	—	—	—	6.93	—	—
35	—	—	—	—	6.38	6.42

1—NaF-Lösung mit Zusatz von Na_2SiF_6 und SiO_2.
2—Lösungen, die durch teilweise Verseifung von Na_2SiF_6 hergestellt wurden.

Am schnellsten stellt sich das Gleichgewicht in stärkeren NaF-Lösungen ein. In schwächeren Losungen ist kein vollständiges Zusammenfallen der Angaben zu bemerken; da sich in diesem Gebiete die pH-Werte der Lösung stark mit der Konzentration des NaF verändern, kann die Abweichung durch Fehler bei der Herstellung der Lösungen hervorgerufen worden sein.

* a) Chemisch reine Flussäure wurde mittels geglühter, durch Hydrolyse von SiF_4 erhaltener Kieselsäure bis zur Sättigung versetzt oder b) H_2SiF_6 wurde durch Hydrolyse von SiF_4 gewonnen.

** Eine gesättigte Ammonnitratlösung ergab eine Veränderung der EMK der Kette um 12—14 mV.

Die Bestimmung der Wasserstoffexponent der Natriumsilicofluoridlösungen ergab folgende Resultate:

Tabelle 2

Konzentrationen, $\frac{M}{1000g\ H_2O}$	pH
0.0356	3.40
0.0178	3.35
0.00712	3.27
0.00356	3.19
0.000356	3.39
0.0000356	4.13

Es sei bemerkt, dass das Vorliegen von Diffusionspotentialen merkliche Entstellungen der Resultate herbeiführen konnte. Die wahrnehmbare pH-Abnahme bei geringer Verdünnung lässt sich möglicherweise auf Spuren überschüssigen NaF in der ursprünglichen Lösung zurückführen. Der von uns für gesättigte Na_2SiF_6-Lösungen gefundene pH-Wert ist etwas höher als der von Treadwell und König (4) und etwas niedriger als die Angaben Kolthoffs (5).

Zusätze von $BaCl_2$ und $CaCl_2$ bewirken eine, starke Aziditätszunahme der Na_2SiF_6-Lösung, was darauf zurückzuführen ist, dass ein Teil des bei der Hydrolyse gebildeten Fluorions als schwerlösliches Fluorid gebunden wird und die Hydrolyse dadurch stark befördert:

$$SiF_6'' + 2H_2O + 3Ca^{\cdot\cdot} = SiO_2 + 4H^{\cdot} + 3CaF_2.$$

Eine gleichzeitig an $CaSO_4$ und Na_2SiF_6 gesättigte Lösung (die somit Niederschläge der beiden Stoffe enthält) weist einen pH-Wert auf, der 2.32 beträgt.

Berechnung der Hydrolysenkonstante

Die Berechnung der Hydrolysenkonstante für SiF_6'' aus den Grössen der Wasserstoffexponenten für Silicofluoridlösungen ist wenig zuverlässig, da—wie entsprechende Berechnungen zeigen—bereits unbedeutende Beimengungen von Produkten der Hydrolyse—F und SiO_2,—den pH-Wert der Lösung merklich erhöhen. Ausserdem macht die Bildung nichtdissoziierter Flussäure eine Berücksichtigung der Dissoziationskonstante der Flussäure erforderlich, einer Grösse, die nicht genügend genau festgestellt ist.

Einfacher und zugleich hinreichend genau ist die von Kubelka vorgeschlagene Berechnungsmethode der Hydrolysenkonstante aus den Wasserstoffzahlen von Lösungen, die an Kieselfluornatrium und Kieselsäure gesättigt sind und Natriumfluorid in Konzentrationen enthalten, welche hinreichend sind, um die Löslichkeit, sowie auch die Hydrolyse, von Na_2SiF_6 derartig herabzusetzen, dass man die vereinfachenden Voraussetzungen

$$m_{Na} = m_F = m_{NaF}$$

ohne Weiteres einführen kann; hier bedeutet m die Konzentration der Lösung, ausgedrückt in Grammolen auf 1000 g Wasser.

Da in einer gesättigten Na_2SiF_6-Lösung die Aktivität konstant ist

$$a^2_{Na^{\cdot}} \cdot a_{SiF_6''} = a_{Na_2SiF_6} = \text{const},$$

so ist die Hydrolysenkonstante:

$$K = \frac{a^4_{H^{\cdot}} \cdot a^6_{F'}}{a_{SiF_6''} \cdot a^2_{H_2O}} = \frac{a^4_{H^{\cdot}} \cdot a^6_{F'} \cdot a^2_{Na}}{a_{Na_2SiF_6} \cdot a^2_{H_2O}} = \frac{a^4_{H^{\cdot}} \cdot m^8_{NaF} \cdot \gamma^6_{F'} \cdot \gamma^2_{Na}}{a_{Na_2SiF_6} \cdot a^2_{H_2O}}.$$

Setzt man die Aktivitätskoeffizienten der neonähnlichen Ionen Na^+ und F' als gleich voraus, $\gamma_F = \gamma_{Na} = \gamma_{NaF}$, so lässt sich die Hydrolysenkonstante folgenderweise berechnen:

$$K = \frac{a_H^4 \cdot m_{NaF}^8 \cdot \gamma_{NaF}^8}{a_{Na_2SiF_6} \cdot a_{H_2O}^3} ;$$

a_H lässt sich aus dem jeweiligen Wasserstoffexponenten der Lösung nach folgender bekannter Gleichung: $a_H = 10^{-pH}$ ermitteln; m_{NaF} wird analytisch bestimmt; γ_{NaF}, der stöchiometrische Aktivitätskoeffizient, wird mit Hilfe der Beziehung:

$$\gamma_{NaF} = \frac{\gamma_{NaCl} \cdot \gamma_{KF}}{\gamma_{KCl}}$$

berechnet. Die Werte der stöchiometrischen Aktivitätskoeffizienten von KCl, NaCl und KF sind den Landolt-Börnstein'schen Tabellen [6] für 25° entnommen. (γ) wurde aus der Gefrierpunktserniedrigung bestimmt. Die Veränderungen ihrer Werte bei 20° können vernachlässigt werden.

Die Aktivität des Wassers unterscheidet sich für die benutzten Salzkonzentrationen wenig von Eins. Sie wurde aus der Dampfdruckerniedrigung der NaF-Lösungen bei 100° berechnet. Die Veränderung der relativen Dampfdruckerniedrigung mit der Temperatur wurde vernachlässigt.

Durch Interpolation der von Hudleston und Rees [7] gemessenen Aktivitätskoeffizienten der Na_2SiF_6-Lösungen, erhält man den Wert γ für eine bei 20°gesättigte Lösung(deren Konzentration, aus den Angaben der gleichen Autoren interpoliert, gleich 0.0356 ist*) zu 0.567. Hieraus folgt die Aktivität einer bei 20° gesättigten Lösung zu

$$a_{Na_2SiF_6} = 4m^3\gamma^3 = 4 \cdot 0.0356^3 \cdot 0.567^3 = 3.29 \cdot 10^{-5}\ **.$$

Die Resultate der Berechnungen sind in Tabelle 3 angeführt. Die vier unteren Werte sind aus den Angaben Kubelkas berechnet.

Temperatur	m_{NaF}	pH	γ_{NaF}	a_{H_2O}	lg K
20°	0.9048	7.37	0.69	0.971	— 26.61
»	0.4524	6.88	0.71	0.985	— 26.97
»	»	6.93	»	»	— 27.17
»	0.2262	6.38	0.75	0.993	— 27.20
»	»	6.42	»	»	— 27.35
23°	0.5342	7.0	0.70	0.983	— 26.92
»	0.3765	6.6	0.72	0.988	— 26.44
»	0.2767	6.5	0.735	0.991	— 27.04
»	»	6.4	»	»	— 26.64

Der Mittelwert des Logarithmus der Gleichgewichtskonstante ergab sich nach unseren Befunden bei 20° zu 26.93 für unverseifte Na_2SiF_6-Lösungen und zu 27.04 für Lösungen, in die SiO_2 durch Verseifung eingeführt wurde.

Der durch beide Methoden festgestellte mittlere Wert des Logarithmus der Gleichgewichtskonstante beträgt —26.93 [gegen den aus den Angaben

* Die durch Interpolation aus den Angaben Stolbas [8] berechnete Löslichkeit von Na_2SiF_6 beträgt 0.0364 mol /1000 g Wasser.

** Wie aus dem Nachfolgenden ersichtlich, ist die Hydrolysenkonstante vom Na_2SiF_6 genügend klein; die Bildung anderer Ionen aus dem SiF_6''-Anteil darf daher vernachlässigt werden.

Kubelkas und Pristoupils (3) bei 23° berechneten —26.76 und den von ihnen selbest angegebenen —26.63].

Kurze Zusammenfassung

Durch pH-Messung von NaF-Lösungen, die an Na_2SiF_6 und SiO_2 gesättigt waren, wurde die Hydrolysenkonstante von SiF_6'' zu $1.2 \cdot 10^{-27}$ bei 20° C bestimmt.

Es wurde das pH von Na_2SiF_6-Lösungen verschiedener Konzentrationen ermittelt, sowie auch der Einfluss eines $CaSO_4$-Zusatzes festgestellt.

Chemisches Forschungsinstitut
Swerdlowsk.

Eingegangen
d. 16. I. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] A. Wagner, Chem. Fabr., 5, 173—177 (1932). [2] И. Рысс, П. Безменова, Заводская лаборатория, IV, 163—167 (1935). [3] P. Kubelka, Přistoupil, Z. anorg. Ch., 197, 391—394 (1931). [4] Treddwell, König, Helv. Chim. Acta, XVI, 1201 (1933). [5] Kolthoff, Massanalyse, II. [6] Landolt, Börnstein, Tabellen, Egb. II, 1126. [7] Hudleston, A. Rees, Journ. Chem. Soc., 1648—1652 (1931). Stolba, Z. anal. Chem., II, 199, 1872.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

GEOCHEMISTRY

ON THE OCCURRENCE OF BERYLLIUM IN FOSSIL COALS

By W. A. SILBERMINZ and A. K. RUSANOV

(Communicated by V. I. Vernadskij, Member of the Academy, 27. I. 1936)

In the course of our usual work in connection with the study of the occurrence of rare elements in fossil coals, it was found expedient to make somdeterminations of beryllium conjointly with those of germanium. Our interest in that element had been stimulated by its high concentration in coals, as evidenced by W. M. Goldschmidt's works (1). While, for a number of rare elements, the coefficient of concentration (in relation to Clarke's number) did not exceed values of 10 to 150, the figures obtained as to the concentration of boron, arsenic, germanium and beryllium (in coals) varied within the range of 100—2 800 (100—500 for beryllium).

The numerous samples* studied by us in connection with the problem of the vanadium and germanium content in coals (2, 3) were subsequently investigated spectroscopically also for beryllium.

In determining beryllium, the following procedure was adopted. A simple voltaic arc formed between two carbon electrodes was used as the source of light. The arc was fed by a continuous 6 A, 250 V current.

We used ordinary commercial electrodes after subjecting them to a special refining process (4), as a result of which spectrally pure carbon electrodes were obtained. The only lines present in the electrode spectrum were: strong boron lines $\lambda = 2496.8$ Å and $\lambda = 2497.7$ Å; faint calcium lines $\lambda = 3933.7$ Å and $\lambda = 3968.5$ Å, and faint magnesium lines $\lambda = 2795.5$ Å, $\lambda = 2802.7$ Å and $\lambda = 2852.1$ Å.

The crater of the lower carbon electrode was filled with a mixture of 20 mg and 10 mg powdered carbon (of the same composition as the electrodes) containing 2% of platinum. The addition of 10 mg powdered carbon corresponded to the introduction into the ash of 1% of platinum.

The spectrogram was obtained with a Hilger medium model quartz spectrograph.

The determination of beryllium cencentration was made by a comparison of the intensification of the following paire of spectral lines: Be $\lambda = 2650.31$ Å —Pt $\lambda = 2659.44$ Å, and Be $\lambda = 3130.42$ Å—Pt $\lambda = 3064.71$ Å. The extent of intensification was estimated visually, the spectrogram being examined with a microscope of magnifying power 10.

* We do not dwell on questions relating to the description of the material used an the methods of its conditioning, as this has already been done by us elsewhere d(2,3).

We were enabled to establish a correlation between the intensification of the spectral lines and the concentration of beryllium after having examined the spectrograms for a number of artificially prepared mixtures (similar in average composition to the ash under examination), with a varying beryllium, but an unvarying platinum content, the latter being equal to 1% of the weight of the mixture. The mixture contained: 35% SiO_2, 26% Fe_2O_3, 20% Al_2O_3, 14% CaO, 3% MgO, 1% V_2O_5 and 1% TiO_2.

The examination of the spectrograms gave the results shown in Table 1.

Table 1

Percentage of Be	Lines to be compared		Comparison of the intensification of the lines
	Be	Pt	
>1	2650.31	2659.44	Be line much stronger than Pt line
	3130.42	3064.71	» » » » » » »
1	2650.31	2659.44	Be line stronger than Pt line
	3130.42	3064.71	» » » » » »
0.1	2650.31	2659.44	Be line equal to Pt line
	3130.42	3064.71	» » somewhat fainter than Pt line
0.01	2650.31	2659.44	Be line fainter than Pt line
	3130.42	3064.71	» » much fainter than Pt line
0.001	2650.31	2659.44	Be line much fainter than Pt line
	3130.42	3064.71	» » scarcely visible
<0.001	2650.31	2659.44	Be line scarcely visible
	3130.42	3064.71	» » absent

Urfortunately, the strong spectral line of beryllium ($\lambda = 2650.94$ Å) and the faint platinum line ($\lambda = 2650.86$ Å) overlap, so that the former cannot possibly be used in determining the concentration of beryllium in ash. Still, the intensification of that line gave some indication as to the beryllium content in the ash.

The table given below shows the results of such of our determinations* as relate to samples containing the highest Be content.

Table 2

Coals showing a Beryllium Content of 0.01 to 0.1% in the Ash		
124	Almazno-Maryevski district, pit 3/3 bis, Almaz stratum	l_3
523	Humarinski deposit No 3	
695	Pechora region, right bank of Malaya Synya river outcrop 51	
Coals showing a Beryllium Content of 0.001 to 0.01% in the Ash		
2	Molchanovski district, the Ruhimovich pit, Bobrovski Stratum,	l_3
17	» » the Melnikov » No 4 »	l_3
111	Almazno-Maryevski district, pit 3/3 bis, Velikan 1 »	l_6
123	» » » » » Velikan 2 »	l_7
134	» » » » No 4, Kamenski 2 »	k_5
144	» » » » No 1 bis, Arshinka »	k_5
116	» » » » Ilyich, Lisyi »	k_2
91	» » » » Maria, Velikan 3 »	l_7
164	Pervozvanovsko-Sorokinski district, pit No 2, Nikanor »	l_4
169	» » » » » »	l_1
190	Centralny district, pit No 1 Kochegarka, Arshinka »	m_4
216	» » Centralnaya Pit, Tolstoy »	m_3
261	Makeyevski district, pit 10/10 bis, Alexander »	m_2

* The spectroscopic determinations were made by V. M. Kostrikin and J. N. Verghiles.

407 Makeyevski district, pit 29, Alexander Stratum l_4
402 Stalinski district, pit 6/14 Almaz » l_3
404 » » » » Pyatichetvertnoy » k_3
450 » » » No 1, Semichetvertnoy » l_1
501 Humarinski deposit, old adit, Shupshurukski »
502 » » Ditto, another samples
504 » » Shupshurukskaya ravine
526 » » M. Shungara ravine, adit No 5
506 » » Holodnaya ravine, adit No 3, Humarinski stratum
601 Tkvarchelski » left bank, Makekvara ravine, stratum I A
606 » » » » » » » II B
610 » » » » » » outcrop stratum IV
541 Tkvibulski » east lot, main adit, stratum 3, sample 12
555 » » » » » » 3 » 26
557 » » » » » » 3 » 28
577 » » west lot » » » 4
658 Medvezhi Island
669 Pechora Region, left bank of Necha river, outcrop 12, seam 16
729 Far Eastern Region, Tsaganski deposit (Amoor-Zeya divide)
732 » » » Okhotski seaboard, Gižigski bay,
794 Yakutia, left bank of Lena river, Lupkha mouth
840 Middle Asia, Kštut Zauranski deposit

Out of the 604 samples examined, only 38 have thus shown somewhat higher concentrations of beryllium. Instances of high concentration of beryllium in coals appear to be very rare. Not once have we had the good luck of hitting upon concentrations as high as, say, 1%, which had repeatedly been found by W. M. Goldschmidt in German and British coals.

Similarly to what is observed with regard to vanadium and germanium ([2], [3]), a higher content of beryllium is associated with coals having the lowest content of ash; this may be seen from the table given below.

Table 3

	Number of samples	Average percentage of ash
Donetz Basin		
Be 0.01—0.1	11	3.34
0.001—0.01	126	5.28
0	150	6.74
Coals from Various Deposits		
Be 0.01—0.1	4	4.3
0.001—0.01	27	10.9
0	47	15.4

A comparison of the average content of beryllium characteristic of several groups of coals originating from various districts of the Donetz Basin gives the following results:

Table 4

	Number of determinations	Average percentage of Be
Lisichanski district	19	0.0015
Almazno-Maryevski district	118	0.0011
Centralni district	94	0.0004
Stalinski-Makeyevski district	54	0.0009

As this has already been ascertained by us for germanium ([3]), the highest average content of beryllium is observed in the marginal portions of the basin, with a gradual decrease towards the main anticilne (Centralny district).

The total number of samples drawn from the Donetz Basin and from all the other deposits and characterized by a certain beryllium content is shown in the table given below.

Table 5

Be %	Donetz Basin	Ilumara	Tkvibuli	Tkvarcheli	Other deposits	Total without Donetz Basin
1) 0.1—1	—	—	—	—	—	—
2) 0.01—0.1	1	1	—	—	1	2
3) 0.001—0.1	18	5	4	3	6	18
4) <0.001	132	8	29	14	72	123
5) 0	153	3	6	1	145	155
	304	—	—	—	—	298

The above figures bring to light some very curious correlations, which would appear to indicate that the relative percentage of beryllium in the coals varies according to the origin of the coal. Of great interest is the fact that the percentage of beryllium content (expressed in the percentage of the number of samples taken from each of the five groups to the total number of samples) is maintained with a fair amount of uniformity with regard to two rather large, but quite different groups of coals (those of Donetz Basin and those of all the other USSR deposits), as this has already been observed by the writers with regard to germanium (3).

Table 6

%	Be		Ge	
	Donetz Basin	Other deposits	Donetz Basin	Other deposits
0.1—1	—	—	7	7
0.01—0.1	0.3	0.6	12	12
0.001—0.01	6	6	21	5
<0.001	43.4	41.3	— } 81	— } 81
0	50	52	60	76

Contrary to Goldschmidt's data, which show some instances of a greater accumulation of beryllium in coals, the concentrations found in our material do not exceed values of the order of 0.01—0.1 %, and even this but in a few cases. It would thus appear, judging at least from the materials handled by us, that so rare an element as germanium is of more common occurrence in the USSR coals than beryllium.

The connection between beryllium and alumina, as established by Goldschmidt (5) for sedimentary rocks, may possibly account but for certain very infrequent instances of beryllium accumulation in coals, since a high concentration of alumina in coal ash does not seem to be very usual. The ash analyses quoted in the work of Meffert and Krym (3) or in that of King and Crossley (4) do not show any uncommonly high percentages of alumina.

On the other hand, we do not so far possess any adequate data for bringing the amount of beryllium ascertained by us in coals into any kind of connection with c l a s t i c material. The average sample of 36 different shales, which

gave to Goldschmidt a BeO content of about 0.001 % (5), can scarcely be considered adequately to represent the great variety of composition shown by the rocks making up the coal strata.

Laboratory of Mineralogy, All-Union Institute
of Mineral Resources. Moskow.

Received
27. I. 1936.

REFERENCES

[1] V. M. Goldschmidt u. Cl. Peters, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, S. 371 (1933). [2] В. А. Зильберминц и В. М. Кострикин, О распространении ванадия в ископаемых углях, Труды В. И. М. С. (1935). [3] В. А. Зильберминц, А. К. Русанов, В. М. Кострикин, К вопросу о распространении германия в ископаемых углях (Сборник в честь пятидесятилетия научной деятельности акад. В. И. Вернадского). [4] A. K. Rusanov, Z. S. f. anorg. Chemie, **219**, 332 (1934); также А. К. Русанов, Журнал прикладн. химии, сер. В, 8, вып. 3, 520 (1935). [5] V. M. Goldschmidt u. Cl. Peters, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, S. 370 (1932). [6] Б. Ф. Мефферт и В. С. Крым Ископаемые угли Донецкого бассейна, вып. II, Ленинград (1936), стр. 298—299. [7] J. G. King a. H. E. Crossley, Publications of the Dep. of Sci. a. Industr. Researches, № 28, London (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI) № 1 (87)

PÉTROGRAPHY

NEOINTRUSIONS OF THE DZYRUL CRYSTALLINE MASSIF

By G. M. SMIRNOV and G. M. ZARIDZE

(Communicated by F. J. Lewinson-Lessing, Member of the Academy, 27.XI. 1935)

According to the short review of one of the authors (1), the Dzyrul massif, investigated in the years 1925—1926, is composed of extremely various igneous as well as sedimentary and metamorphic rocks (1,2). The sedimentary-metamorphic complex is older than the igneous rocks and includes different gneisses, micaceous schists, amphibolites, phyllites, etc., which are embedded in patches among the igneous rocks. The igneous rocks belong to the intrusive type and are represented by granites, quartz diorites, quartz gabbro-diorites and pyroxenites. Taking into consideration the scope of our knowledge of that time, it is quite natural that we referred sedimentary and metamorphic rocks to the pre-Cambrian and considered the intrusions to be not older than the uppermost pre-Cambrian.

Later on, in 1930, some Cambrian fauna was discovered by G. P. Barsanov (3) in the metamorphic series of schists and limestones. This discovery resulted in the rising of the stratigraphical limit, which is now confined to the Lower Paleozoic.

I. G. Kuznetsov (4) considers, however, that the Dzyrul granites are of different age. In his opinion, only red granites, intersecting phylites, are of Paleozoic age, while gray porphiritic granites which enter the gneiss formation are referred by him to the pre-Cambrian.

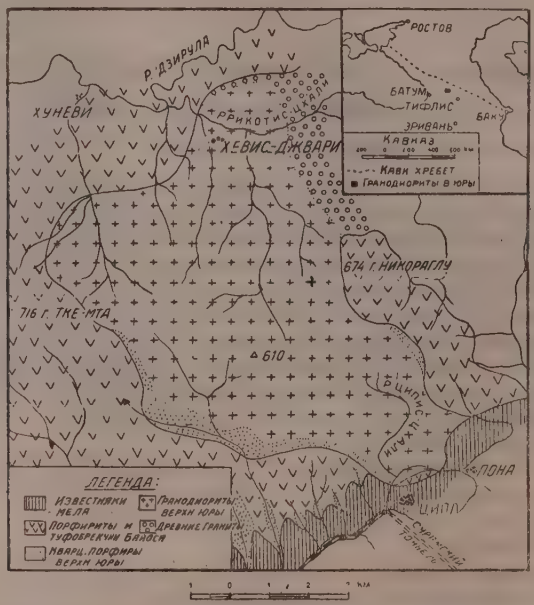
Our petrographic investigations, carried on in the region of Pona and Tzipa villages (in the south-eastern part of the massif), throw a new light upon this problem.

In the year 1933, when carrying on the microscopic investigations of the rocks of the Dzyrul massif, we recorded a peculiar composition of granodiorites of the just mentioned district. In the Dzyrul granites and the ancient granites of the Central Caucasus potash feldspats are almost exclusively represented by a «cross-hatching» microcline with $2V$ equal to about $-80°$. In the rocks investigated by the authors they are represented by a potash anorthoclase with $2V$ varying from -52 to $60°$. According to the data of D. S. Belyankin (5), this anorthoclase is a constituent of the so-called caucasites, that is of granites and granodiorites of a very young (Alpian) age (neointrusion). It is quite natural that the fact discovered by us excited our curiosity. Chemical and mineralogical investigations were undertaken and resulted in the discovery of suplementary features allying Pona intrusive rocks with the neointrusion. These features are as follows: 1) the relative basicity of their plagioclase (up to № 60 in the central parts of strongly zonal crystals); 2) the presence of the usual hornblende to gether with biotite among the coloured constituents; 3) the general variegation and the in-

constancy of the quantitative mineralogical composition; 4) the lack of cataclase phenomena in their microstructure, and so on.

All these data confirm us in our opinion that the Pona granodiorites are nothing else but neointrusive rocks which, as regards their chemical composition, differ sharply from all other rocks of the Dzyrul massif. In the following table the chemical composition of the most typical granodiorite (after

Geologic-Petrographical Scheme of the Basin of a Part of Dzyrula and Zips-Zchali Rivers



the analysis of the Transcaucasion Section of the Institute of Mineral Resourses) is compared with that of neodiorites and neogranites of the Suatisi-Dona River (Central Caucasus)([6]).

	Pona granodiorite	Molecular proportions	Suatisi-Dona diorite	Molecular proportions	Suatisi-Dona granite	Molecular proportions
SiO_2	63.57	1.058	60.41	1.000	68.87	1.134
TiO_2	0.49	.006	1.39	.017	0.58	0.007
Al_2O_3	17.96	.175	16.33	.160	14.91	0.146
Fe_2O_3	3.58	.023	0.79	.005	2.34	0.114
FeO	1.84	.025	4.52	.063	0.64	0.009
MnO	0.13	.003	0.10	.001	0.04	0.001
MgO	2.32	.058	3.82	.095	1.26	0.031
CaO	5.54	.098	5.70	.102	2.95	0.052
Na_2O	2.65	.043	0.02	.065	3.96	0.063
K_2O	1.89	.020	1.89	.021	4.42	0.046
H_2O	0.89	.050	0.95	.053	0.54	0.030
Total	101.20	—	100.01	—	100.11	—

Magmatic formulae and acidity coeficients
(after Loewinson-Lessing)

	1	2	3
—	1.25	2.1	1.25
RO	1	1	1
R_2O_3	5.34	6.2	7.1
SiO_2	0.34	0.3	1.2
R_2O : RO	2.51	2.4	3.3

It is quite evident that as regards their chemical composition the Pona rocks are related rather to quartz neodiorites than to neogranites.

In the years 1934—1935 Zaridze undertook a more detailed survey of the Pona intrusion, with a view to determining its geological age as well as its proportion in the composition of the Dzyrul massif. He succeeded in finding some facts which helped to locate the stratigraphical limits of the neointrusion between the Lower Cretaceous and Bajocian as well as to establish its size, reaching up to tens of square kilometres in the horizontal section (see the schema). It is probably the greatest known neointrusion of all the Caucasus and Transcaucasia. In the beds of the Ponis-Zchali, Rikoti, and Zchali rivers in the latter (near the Grigolati village) and in many other places he observed clearly marked contacts of the neointrusion with porphyrites of the Bajocian. At the places of contact the neointrusion of granodiorite has a more or less pronounced porphyritic structure, while the porphyrites of the Bajocian transform into typical exocontact hornstones.

Numerous fragments of the quartzporphyries connected with neointrusion were encountered in the basal conglomerates of the Lower Neocomian at the Golatubani village.

The discovery of a thick neointrusion in the Dzyrul massif is a fact of prime importance, both from the geological and petrographical points of view. This discovery complicates our conception of the massif.

The geologists of Georgia are carrying on detailed investigations of the latter, and it is not improbable that other geologic-petrographical surprises are in store for us.

The materials collected in 1934—1935 are being worked up by the second author in the Petrographic Institute of the Academy of Sciences.

Petrographic Institute
of the Academy of Sciences of USSR
Moscow.

Received
27. XI. 1935

REFERENCES

[1] Г. М. Смирнов, Геологические наблюдения в восточной части Шарапанского уезда. [2] Д. С. Белянкин, Магматические горные породы и некоторые полезные ископаемые Западной Грузии, Труды Петрографического института Академии Наук СССР (1934). [3] Г. П. Барсанов, Нижний кембрий в Закавказьи, Bull. Acad. Sci. URSS (1931). [4] И. Г. Кузнецов, Известия Всесоюзного геолого-разведочного объединения, **50**, вып. 100 (1931). [5] Д. С. Белянкин, Об анортоклазе в кавказитах, Bull. Acad. Sci URSS (1927). [6] Д. С. Белянкин. К изучению горных пород Казбека и его окрестностей, Известия СПб. Политехнического института, **21**, вып. 1 (1914).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

PLANT PHYSIOLOGY

REGENERATION OF YAROVIZED PLANTS AFTER INJURY OF THE GROWING POINTS

By. A. M. LEBEDEV and L. I. SERGEJEV

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 5. II. 1936)

The experiments of Academician T. D. Lyssenko ([5],[6]) have established the fact that the process of yarovization takes place in the meristem of the growing points. The author of the theory of stage development employed the astute experimental device of grafting soy bean and cotton plant to differentiate the elements in the various stages of development and demonstrated the localization of the qualitative changes in yarovization. This localization is confirmed also by numerous observations made on the development of a number of other plants (perennial rye, beets, and others). Up to the present, however, the complex of physico-chemical changes in the protoplasm of the cells of embryonal tissue which accompanies yarovization has remained unstudied. Touching on the subject there is only the work of Academician A. A. Richter on the shifting of the isoelectrical point ([7]) and the data of one of the authors of this article (L. I. Sergejev) on the lowering of the permeability of protoplasm ([9]).

In this article we will deal with certain phenomena encountered by one of the authors (A. M. Lebedev) ([4]) while carrying on experiments in yarovization.

Grain of the winter wheat «Ukrainka», yarovized in 1930 in the course of 67 days, after being dried a little, was left over after the sowing until the following year (kept at room temperature). Sowed is 1931 along with a number of freshly yarovized varieties, with a doubled seeding norm owing to lowered germinativeness (50%), «Ukrainka» proved to pass through the same vegetative phases of development as are characteristic for non-yarovized winter wheat sown in the spring. Phenological observations established the fact that, together with a lowering (40%) of the thickness of stand, «Ukrainka» of the last year yarovization remained in the stage of tillering, while, on the other hand, the varieties yarovized during the year when it was sown passes normally through all phases to ripening.

During the course of the following two years the experiment was repeated with a number of varieties, various periods of yarovization being used. We present the data on germination of the seed material of several varieties yarovized during various periods in 1931 and 1932 (see Table 1).

Table 1

Germinativeness of Seed Material Yarovized in 1931 and 1932 and Sowed in 1932 (in Percentages)

Name of variety	Year of yarovization	Period of yarovization in days			Control (non-yarovized)
		42—45 days	30 days	15—20 days	
Winter wheat No 329	1931	—	—	85	100
» » » »	1932	100	100	100	
» » Kooperatorka	1931	—	54	85	100
» » »	1932	100	100	97	
» » No 237	1931	68	41	61	100
» » No A 2453	1931	74	44	66	100
Spring » No 62	1931	—	47	25	100
Winter » 27/36	1932	100	100	97	100

It is evident from this table that grain yarovized in 1931, on being sown in the spring of 1932, had a greatly lowered germinativeness, which again served as grounds for a correspondingly increased seeding norm.

The same thing vas observed in the experiments of 1932—1933. In Table 2 we present the data from the phenological observations on certain varieties, according to the experiments in 1932 and 1933.

Table 2

Results from Phenological Observations on Plots Sown with Yarovized Seeds of Different Years

Year of experiment	Name of variety	Year of yarovization	Period of yarovization in days	Came up	Tillered	Formed stalk	Formed ears
1932	Winter wheat No 329	1931	60	19/V	22/V	—	—
		1932	42	10/V	22/V	28/VI	16/VII
		1932	30	11/V	22/V	7/VII	13/VII
		Control	—	12/V	23/V	—	—
1933	Winter wheat No 329	1932	42	11/V	21/V	—	—
		1933	47	11/V	25/V	21/VI	21/VII
		Control	—	9/V	20/V	—	—
	Winter wheat «Kooperatorka»	1932	42	11/V	25/V	—	—
		1933	47	11/V	25/V	17/VI	10/VII
		Control	—	11/V	25/V	—	—
	Rye-wheat hybrid 27/36	1932	30	11/V	25/V	—	—
		1933	47	11/V	23/V	17/VI	10/VII
		Control	—	9/V	19/V	—	—

The field experiments were confirmed also by parallel hothouse experiments in 1933. In these, seed kept two years after yarovization were sowed; this showed a delay in coming up (of 3 or 4 days) and of the stage of tillering (as much as 13 days) in comparison with seed yarovized and kept only one year.

The data regarding the tillering of the plants in the different variants of the experiments are of particular importance (see Table 3).

Table 3

Tillering of Plants in the Different Variants of the Experiment

Nos	Experimental variants	Number of shoots				
		Winter wheat No 329	Rye-wheat hybrid No 434/154	Winter wheat No 237	Winter wheat «Kooperatorka»	Spring wheat No 62
1	Control	3 — 21	3 — 18	4 — 18	4 — 20	3 — 7
2	Yarovization just before sowing	9 — 32	18 — 25	7 — 23	11 — 30	3 — 7
3	Yarovized and kept (during the course of a year) in a dried state	48 — 165	118 — 162	98 — 160	73 — 145	9 — 11

Thus, seed yarovized and kept a long time in a dried state before being sown gives a great number of shoots. Spring wheat No 62 was the only one to manifest a slight increase of the number of shoots.

Entering now upon a theoretical analysis of the facts set forth, we consider:

1. Yarovized winter wheat which has been kept dried out for a long period does not form ears because of injury of the growing points, which have undergone qualitative changes during the yarovization. The explanation of this phenomenon as an «un-yarovization» ([3]) was not based on a sufficient number of observations.

2. The injury from the drying out of the growing points, which have, during yarovization, lost their colloidal resistance to unfavourable physico-chemical influences ([9]), stimulates a vigorous regenerative process, as a result of which a large number of un yarovized shoots are formed. This phenomenon is explained by the theory of «living matter» elaborated by Prof. E. S. Bauer ([1]). Taking as the basis of this work the principle of stable inequilibrium, he demonstrated that levelling processes which ensue when one part of the organism dies lead to a heightened «potential» of other parts. In our particular case, this was reflected in a vigorous tillering. In confirmation of the correctness of our conclusion, we cite two more instances.

It is well known to persons engaged in agriculture that when the upper growing point of the sunflower has been injured by spring frosts, there occurs so-called «many-headedness», that is, lateral fruit-bearing shoots. The second example is from the animal kingdom. The work of L. A. Blacher and others ([2]) with tadpoles has established the fact that amputation of some parts stimulates the regeneration of others.

Saratov Plant Breeding
Experimental Station.

Received
5. II. 1936.

REFERENCES

[1] Э. С. Бауэр, Теоретическая биология (1935). [2] Л. Я. Бляхер, М. А. Воронцова, А. И. Ирихимович и Л. Д. Мюзнер, Труды института морфогенеза, 1 (1934). [3] И. М. Васильев, Доклад на 1-й конференции молодых ученых в гор. Саратове (1934). [4] А. М. Лебедев, Опыты по яровизации озимых пшениц в 1930—1933 гг. (manuscript). [5] Т. Д. Лысенко, Бюллетень яровизации, 4 (1932). [6] Т. Д. Лысенко, Теоретические основы яровизации (1935). [7] A. A. Richter, V. Rancan and M. Pekker, C. R. Acad. Sci. URSS, 2 (1935). [8] A. A. Richter, Природа, 2 (1934). [9] Л. И. Сергеев, О стойкости растений к низким температурам (manuscript).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

PLANT PHYSIOLOGY

THE EFFECT OF THE YAROVIZATION OF PLANTS UPON THE ACCUMULATION OF ORGANIC SUBSTANCE

By I. N. KONOVALOV

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 26. I. 1936)

It is known from the works of Academician T. D. Lysenko (1) and from the subsequent investigations of other laboratories that in the conditions of drought and arid winds yarovization indirectly contributes to the increase of the yield. In regions where drought and arid winds increase by the middle of summer, coinciding with the period of reproductive development of the basic agricultural plants, yarovization protects the plants from the destructive effect of drought by accelerating the course of fruit-bearing, and thus contributes to the increase of the yield.

However, recently, parallel with corroborrations of the tremendous role of the indirect effect of yarovization upon the increase of the yield, in agricultural literature begin to appear individual opinions [Prof. I. M. Vassilyev (2) and Academician Richter (3)] in favour of the direct stimulating effect of yarovization on the growth of plants. In favour of this effect speak likewise the facts of greater accumulation of organic matter and the increase of yield of seeds by yarovized plants grown in hothouses, where the conditions of temperature and moisture of the air are extremely favourable for the development of the plants. Finally, the increased yield under yarovization in moist years in farming conditions cannot be solely attributed to the indirect effect of yarovization of the plant.

The present work was carried out in 1934 at the Laboratory of Plant Physiology of the All-Union Institute of Grain Farming, Saratov, and pursued the following tasks:

1) To compare the course of accumulation of organic matter by yarovized and unyarovized plants;

2) To check the effect of yarovization method from the standpoint of increase of yield in plants grown in hothouses, where at no time throughout the entire period of crop growing the conditions approach those of drought and arid winds, and to find out, thus, the existence of a direct effect of yarovization upon the increase of the yield.

Method of Investigation

We used as experimental plants hard spring wheat *Hordeiforme*, 010 line, and plate lentil, 25 line. In the conditions of the South-East of the European part of the USSR, both

these plants are late-maturing forms and strongly react to yarovization. According to Lysenko, *Hordeiforme* 010, which is a representative of hard late-maturing forms, reduces its vegetative period up to earing by 6—7 days, while the lentil, according to the data of the Laboratory of Plant Physiology of the All-Union Institute of Grain Farming (4) reduces its vegetative period up to flowering by 7—8 days.

One series of investigations was conducted in the winter of 1934 in a hothouse, while another one was carried out in the summer of 1934 in the conditions of a vegetation house. Both in the first and the second series of experiments, the plants were grown in vegetation vessels. The experiment were repeated 10 times, there being 10 plants of wheat or 5 plants of lentil per vessel. Optimum conditions of mineral nutrition, generally used in vegetation experiments, were ensured. The moisture of soil in the vessels was near to optimum—60 per cent of the full moisture capacity, while the air moisture in the hothouse was about 40—50 per cent of the relative moisture. The temperature in the hothouse varied within the range of 18—25° C.

Yarovization of wheat was conducted by the method developed by Lysenko, whereas the method of yarovizing the lentil was developed by the Laboratory of Plant Physiology of the All-Union Institute of Grain Farming. Sowing in winter experiments was done on January 24, in summer experiments on April 30. To accelerate the development of the plants in winter experiments, the hothouse was lighted day and night from the moment of sprouting to complete ripening of the plants. Accelerated ear formation in wheat and flowering of lentil were taken as indices of the accelerated development of the investigated plants due to the effect of yarovization.

To study the process of accumulation of organic substance by the plants, the increase of dry substance was determined in samples taken at certain phases of the development of the plants. Samples were taken from 10 vessels of both wheat and lentil. The samples were taken in the morning between 8 and 10 a. m. and were dried during 24 hours at temperature of 45—50°. The data obtained were worked up by the method of variation statistics.

Results of Investigations

All the experiments have shown a decrease of the vegetation period of both wheat and lentil. Due to yarovization, the earing period in wheat was reduced by 6 and the flowering period of lentil, by 7 days. Yarovized wheat plants began to form ears on March 1 in the hothouse and on June 19 in the conditions of the vegetation house, whereas the unyarovized plants started to ear only on March 6 in the hothouse, and on June 27 in the conditions of the vegetation house. The flowering of yarovized lentils began on February 20 in the hothouse and on June 18 in the vegetation house, the respective dates for unyarovized plants being March 1 and June 25. A similar acceleration in the development of the plant have been preserved up to the harvest time.

As regards the process of accumulation of organic matter by yarovized and unyarovized plants, the data given in the tables were obtained.

As evident from these data, the increase of organic matter in yarovized plants is more rapid than that in unyarovized ones, and in their ultimate yield, the former give a greater bulk of organic matter, as compared with the latter. We observed likewise an accelerated accumulation of organic matter by yarovized plants in field experiments of yarovizing the lentil (4).

In all the four variants of the experiments, the results of which are given in the tables, yarovized plants gave an increased yield of the total mass and seeds. In hothouse conditions, where there could be no drought or arid-winds throughout the entire period of the development of the plants, yarovization increased the yield of wheat by 13.7 per cent as regards the total mass, and by 13.6 per cent as regards the seeds. True, the increase of yield by yarovization is less in the conditions of the vegatation house; nevertheless, the phenomenon of yarovization increasing the yield prevails in this case as well. The increase of yield by yarovization in this case amounted to 3.56 per cent for the total mass, and 6.7 per cent for the seeds.

Table 1

The Accumulation of Organic Substance by Wheat Plants in Hothouse Conditions in Connection with Yarovization

Date of taking the samples	Productivity in absolute figures				Increase of yield in percentages
	Weight of dry mass of 10 yarovized plants in g	Weight of dry mass of 10 control plants in g	Difference in g	Statistical significance of the difference	
1st sample, taken February 8 . . .	0.236 ± 0.004	0.221 + 0.002	0.015 ± 0.004	3.7	10.5
2nd sample, taken February 20 . .	2.87 ± 0.007	2.637 ± 0.016	0.24 ± 0.018	13.0	8.5
3rd sample, taken March 4, when yarovized plants began to ear					
Total weight . . .	8.73 ± 0.009	7.54 ± 0.009	1.19 ± 0.13	9.15	15.7
Weight of stems .	6.79 ± 0.094	5.89 ± 0.005	0.9 ± 0.094	9.5	15.2
Weight of leaves .	1.15 ± 0.015	0.99 ± 0.012	0.16 ± 0.019	8.4	16.2
Weight of ears . .	0.81 ± 0.017	0.67 ± 0.015	0.14 ± 0.023	6.09	20.9
4th sample, taken. March 10, when control plants began to form ears					
Total weight . . .	10.35 ± 0.010	9.20 ± 0.011	1.15 ± 0.16	7.1	12.5
Weight of stems .	7.55 ± 0.096	6.73 ± 0.083	0.820 ± 0.127	6.4	12.1
Weight of leaves .	1.70 ± 0.025	1.52 ± 0.023	0.18 ± 0.034	5.2	11.9
Weight of ears . .	1.075 ± 0.028	0.952 ± 0.022	0.123 ± 0.036	3.2	12.9
5th sample, taken at the day of harvesting (yarovized, April 25, control, April 30)					
Total weight . . .	30.59 ± 0.311	26.82 ± 0.308	2.77 ± 0.45	6.1	13.7
Weight of seeds .	3.93 ± 0.071	3.46 ± 0.049	0.47 ± 0.08	5.4	13.6

Table 2

The Accumulation of Organic Substance by Wheat Plants in Conditions of Vegetation House in Connection with Yarovization

Date of taking the samples	Productivity in absolute figures				Increase of yield in percentages
	Weight of dry mass of 10 yarovized plants in g	Weight of dry mass of 10 control plants in g	Difference in g	Statistical significance of the difference	
1st sample, taken June 1	4.95 ± 0.042	3.45 ± 0.063	0.5 ± 0.076	6.5	43.47
2nd sample, taken June 11	14.35 ± 0.227	12.24 ± 0.358	2.11 ± 0.43	4.9	17.23
3rd sample, taken June 29	24.46 ± 0.707	21.52 ± 0.526	2.94 ± 0.89	3.3	13.66
4th sample, taken at harvesting (the yarovized on August 7, unyarovized on August 12)					
Total weight . .	70.05 ± 0.812	67.63 ± 0.676	2.42 ± 1.057	2.28	3.56
Weight of seeds . .	14.35 ± 0.871	13.45 ± 0.205	0.9 ± 0.343	2.62	6.7

Table 3

The Accumulation of Organic Substance by Lentil Plants in Hothouse Conditions in Connection with Yarovization

Date of taking the samples	Productivity in absolute figures				Increase of yield in percentages
	Weight of dry mass of 10 yarovized plants in g	Weight of dry mass of 10 control plants in g	Difference in g	Statistical significance of the difference	
1st sample, taken February 8 . . .	0.27 ± 0.004	0.23 ± 0.005	0.4 ± 0.007	5.7	17.39
2nd sample, taken February 20 beginning of flowering of yarovized plants	8.62 ± 0.005	0.54 ± 0.004	0.08 ± 0.008	10.0	14.81
3rd sample, taken March 1, beginning of flowering of control plants	1.50 ± 0.008	1.36 ± 0.008	0.14 ± 0.010	14.0	10.29
4th sample, taken at harvesting (yarovized, April 17; control, April 21)					
Total weight . . .	4.93 ± 0.027	4.46 ± 0.018	0.47 ± 0.029	16.2	10.54
Weight of seeds . .	0.72 ± 0.002	0.64 ± 0.006	0.08 ± 0.007	11.4	12.5

Table 4

The Accumulation of Organic Substance by Lentil Plants in Conditions of Vegetation House in Connection with Yarovization

Date of taking the samples	Productivity in absolute figures				Increase of yield in percentages
	Weight of dry mass of 10 yarovized plants in g	Weight of dry mass of 10 control plants in g	Difference in g	Statistical significance of the difference	
1st sample, taken June 10, at beginning of flowering of yarovized plants .	5.5 ±0.064	4.30±0.128	1.2 ±0.027	4.3	27.90
2nd sample, taken at harvesting (August 7 for yarovized, August 13 for control plants)					
Total weight . .	27.50±0.525	21.80±0.657	5.70±0.83	6.8	26.14
Weight of seeds	2.20±0.152	1.64±0.126	0.56±0.2	2.8	34.14

A similar increase of yield by yarovization was observed in the case of lentil. Tables 3 and 4 show that in hothouse conditions yarovization increases the yield of the total mass by 10.54 per cent, and of the bulk of seeds by 12.5 per cent, while in the conditions of the vegetation house the respective increase is 26.14 and 34.14 per cent.

Thus, in our opinion, on the basis of all the works on yarovization previously known to us as well as of the data of this investigation, we can

make one essential deduction. Yarovization has a double effect upon the plant: on the one hand, in accelerating the development of the plant, it shelters the seed from the destructive effect of drought and arid winds during the ripening period, thus proving to be the most powerful weapon in the struggle for increased yield,—this is the indirect effect of yarovization, while, on the other hand, yarovization produces a direct favourable effect on plants.

State University
of Kasan

Received
26. I. 1936

REFERENCES

[1] Т. Д. Лысенко, Бюл. яровизации, **1, 2, 3 и 4**. [2] П. М. Васильев, Сборник «Против вредной теории преимущества мелкой вспашки», Саратов (1933). [3] А. А. Рихтер, Совхозная газета, 300 (1934). [4] И. Н. Коновалов, Соц. зернов. хозяйство, **1** (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

ZOOLOGY

OBSERVATIONS ON THE REPRODUCTION PERIOD OF GRENLAND SEALS (*HISTRIOPHOCA GROENLANDICA OCEANICA* LEPECHIN)

Von S. V. DOROFEJEV

(Communicated by S. A. Zernov, Member of the Academy. 26. I. 1936)

The study of the biology of Grenland seals during their stay in the White Sea has been hitherto confined to the period of ice navigation hunting. In so far as this period usually begins on March 1, while the end of hunting voyages is usually determined by ice conditions and is generally in May, the investigation was limited to these three months only. It commenced when the mass of cows had already time to calve, and to form the so-called «calf deposits», *i. e.*, the accumulation of cows with calves on the ice. It covered also the lactation period, the commencement of the independent life of the offspring, the mating of adults and the moulting period. The earlier period, the one connected with the coming of seals to the White Sea, and the period of calving remained untouched by direct investigation until 1934, when the icebreaker «G. Syedov» accomplished at last the experiment of an earlier hunting voyage. Having taken part in this voyage, I was enabled to make a number of observations and to elucidate several questions connected with the biology of Grenland seals, as yet unknown. In particular, I was able to obtain new data on the process of calving of the While Sea race and the formation of calf deposits.

For this purpose, in addition to a number of direct observations of mass reproduction, a daily analysis was conducted of the age of the calves in all early slaughters (end of February—early part of March). As a criterion to judge of the time of birth, was taken the weight of their skin flayed together with the entire subcutaneous layer of fat. As shown by mass weighing, during the short period of lactation (which lasts about three weeks) the calf puts on a subcutaneuos layer of fat, which weighs on the average from 15 to 17 kg. Already in the first days of its existence, there is an increment of weight of 400—500 g per day. Thus, by means of mass weighing (we used to take 150—170 skins from each killing) and comparisons made on the basis of their variation numbers, it is possible to judge of the relative time of birth of the calves killed in different parts of the deposits.

An attempt to utilize for the same purpose the data on the linear growth of the calves failed to give any positive results, as the zoological length of the calves during the entire lactation period increases only about 25 cm. Therefore, the daily increment is smaller than the error which may occur under the existing field methods of measurement.

The data obtained by means of an analysis of the composition of the deposits were in a number of cases corroborrated by direct observation of mass reproduction. Investigations made enable us to establish the following.

1. The period of mass reproduction of the Grenland seal covers the second half of February and the first five days of March. After this period, although newly born calves are sometimes encountered, they are in relatively small quantities. The latest date, when individual cases of calving were observed was April 15.

2. During the last ten days of February and the first five days of March the cows calve in great numbers and almost daily.

3. Gathering among ice-floes, the cows, awaiting the moment of calving partly remain in the water, partly climb out on the ice and form large temporary deposits.

4. After part of the animals which compose a given herd have calved, the others continue calving in the same region. Therefore, the formation of each individual calf deposit is a more or less protracted process. During this process we find, in direct proximity of cows lying on the ice together with the newly born calves, accumulations of cows whose time to calve has not yet arrived. On account of these accumulations, the calf deposit is growing almost continually for a number of days while the cows which compose this deposit bring forth their youngs.

5. The herds arriving later on may concentrate around the calf deposit which has already begun to form.

6. The last to arrive and the last to calve are the young cows which calve for the first time, their calving takes place in the beginning of March; this corresponds with the later coming to the White Sea and mating of seals which have just reached puberty.

Simultaneously with the study of these questions, I took advantage of the fact that calves in the early stage do not go into water, and collected data on the correlation of sex groups in the offspring. Determination of sex in 1414 calves showed 51 per cent males and 49 per cent females.

Received
26. XII. 1935.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume II (XI), № 1 (87)

GENETICS

AN ATTEMPT AT A NEW METHOD OF GENETICAL ANALYSIS OF QUANTITATIVE CHARACTERS

By A. S. SEREBROVSKIJ, Corresponding Member of the Academy

If from one pair of parents be obtained a group of offspring (sibs), then, owing to the presence of variability, paratypical and genotypical, sibs show a certain distribution as regards the character studied. This distribution may be characterized by a series of biometrical parameters, M, μ_2 $(=\sigma^2)$, μ_3, etc. These parameters will be different depending upon the difference in the genotype of the parents crossed. Denoting by φ —phenotype, by γ — genotype, and by π—paratype, we get;

$$\mu_{2\varphi} = \mu_{2\gamma} + \mu_{2\pi}.$$

At homozygosis of the parents $\mu_{2\gamma} = 0$ and $\mu_{2\varphi} = \mu_{2\pi}$ at segregation in ratio 1 : 1 $\mu_{2\gamma} = {}^1/_4 i^2$, where i is the force of action of the gene, at segregation in ratio 1 : 2 : 1 $\mu_{2\gamma} = {}^2/_4 i^2$, etc; depending upon a series of genotypical conditions: the number of genes which participate in the segregation, their strength, the degree of dominance, linkage between the genes, etc.

For the simplest monohybrid case with an incomplete dominance the following 6 types of crossings with corresponding parameters are possible.

Type of crossing	Consistence of progeny	M	$\mu_{2\varphi}$
(1) $aa \times aa$	aa	Ma	$0 + \mu_{2\pi}$
(2) $Aa \times aa$	$Aa + aa$	$Ma + \frac{1}{2} i$	$\frac{1}{4} i^2 + \mu_{2\pi}$
(3) $AA \times aa$	Aa	$Ma + \frac{2}{2} i$	$0 + \mu_{2\pi}$
(4) $Aa \times Aa$	$AA + 2Aa + aa$	$Ma + \frac{2}{2} i$	$\frac{2}{4} i^2 + \mu_{2\pi}$
(5) $Aa \times AA$	$AA + Aa$	$Ma + \frac{3}{2} i$	$\frac{1}{4} i^2 + \mu_{2\pi}$
(6) $AA \times AA$	AA	$Ma + \frac{4}{2} i$	$0 + \mu_{2\pi}$

It has been found convenient to plot these data on a square field, where the abscisses are the values of M and the ordinates, the values of $\mu_{2\varphi}$. Then a characteristic triangular dot-drawing is obtained (see Fig. 1).

Having a sufficiently large number of sibs and marking the empiric points (one for each sib) on the field, we will got accumulations of empiric points by the side of these 6 theoretical points of our «monohybrid triangle». As will be seen later, different genetic cases will have their own characteristic triangle. Therefore, the problem consists in findingthe triangle in the distribution of empiric points on the field and in detecting its characteristic features, which reflect the genetic peculiarity of the given

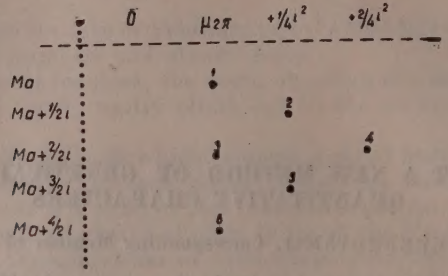


Fig. 1.

case. The great advantage of such a method of genetical analysis is that

1) we see all the material at one glance and in a conveniently surveyable form;

2) separating the dots onto a plane, *i. e.* passing from one dimension to two, we approximately $\sqrt{2}$ times lessen the paratypic variability which hindered the analysis, because the distances between the points increase.

In Fig. 2 the «triangles» for several different genotypical cases are represented, which answer to the following conditions:

a) a monohybrid case with complete dominance;

b) a dihybrid case with incomplete (intermediate) dominance of genes independent and equal in strength;

c) same as case b), but with a complete dominance;

d) same as case b), but with one gene three times stronger than the other;

e) same as case b), but with linkage corresponding to 0% of crossing-over;

f) same as case b), but for working bees, where the fathers cannot be heterozygous and do not give segregation.

The problem of the working out of the theory of this method consists, first of all, in finding the triangles that would correspond to the various genotypical cases. Such cases are of course infinite in number, but they can all be distributed into different series and families, for each of which characteristic features can be detected. For example, depending upon the degree of dominance, we have a series of triangles, from that shown in Fig. 1 to that shown in Fig. 2. The regularity of the change of the triangle in this series consists in that, in proportion to the increase of dominance, the three points which make up the «south-eastern» edge of the triangle in Fig. 1 (points 4,5 and 6) will shift gradually, approaching the other three, which remain immovable. At complete dominance points 5 and 6 will unite with point 3, while point 4 will be somewhat to the «south-west» of point 2.

Just in the same manner, in dihydrid crossing, depending upon the difference in the strength of genes *A* and *B*, we get a series of triangles from that represented in Fig. 2, *b* to that shown in Fig. 1, an intermediate one being shown in Fig. 2, *d*, on which a grouping of points into 6 groups is already to

be observed. If the strength of a weaker gene approaches zero, then the points in each of these 6 groups (Fig. 2, *d*), will approach one another till fully merged.

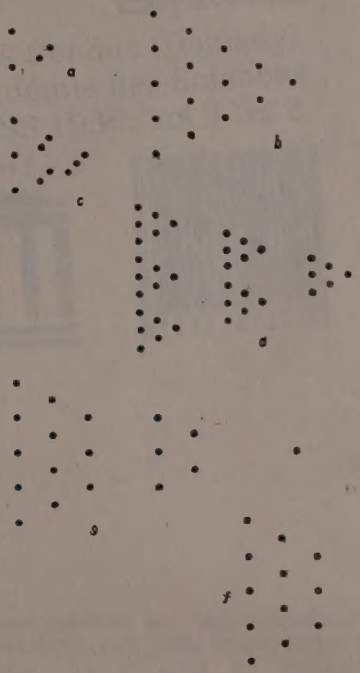


Fig. 2.

Of course, the paratypical variability which makes the analysis difficult remains a difficulty also in this method. Therefore, in case of a strong paratypical variability (in comparison with the genotypical) it will be found difficult or even impossible to find out the character of the triangle and to solve the problem. Howerer, this method may be developed further, for example, by using μ_3 or μ_4 and passing to spatial schemes, etc., and by some other methods allowing us to ascertain the structure of the triangle.

University of Moscow,
Laboratory of Genetics.

Received
26. I. 1936.